

A1 実数の計算

【二重根号】

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} \quad \sqrt{5+\sqrt{24}} \quad \sqrt{23+2\sqrt{132}} \quad \sqrt{23-2\sqrt{132}}$$

FullSimplify で二重根号が外れることがある。

外れないときは、知られている初等的な方法をプログラムする。

【電卓的な計算】

2^{10} , 2^{100} , 2^{1000} , 2^{10000} を計算せよ。

$e^{\pi\sqrt{163}}$ を有効桁数 30 桁で求めよ。9 が 12 個連続して並ぶ。

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2}{27+3\sqrt{69}}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{2}} \right)^{30000} \text{ を有効桁数 6000 桁で求めよ。}$$

途中で 0 が 1831 個連続して並ぶ。(Pisot 数)

() 内の数はある 3 次方程式の解である。それを求めよ。

$$x^3 - x - 1 = 0$$

【数列】

初項が 3, 公差が 5 の等差数列の 50 項目を求めること。また、50 項までの和を求めること。

初項が 3, 公比が $-1/2$ の等比数列の 50 項目を求めること。また、50 項までの和を求めること。

数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 初項が 3, 公差が 2 の等差数列のとき、 a_{50} と $\sum_{k=1}^{50} a_k$ を求めること。

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ として定義されるフィボナッチ数列 $\{a_n\}$ について次を確認すること。

$$n \text{ を } 1 \sim 20 \text{ の範囲で } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{GoldenRatio}$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{a_{2^k}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \quad \text{Lucas: Amer.J.Math. 1(1878)}$$

```
Fibonacci[n_Integer?Positive]:=Module[{fn1=1,fn2=0},
Do[{fn1,fn2}={fn1+fn2,fn1},{n-1}];fn1];
Do[Print[Fibonacci[n]],{n,1,10}]
Do[Print[1/N[Fibonacci[2^k]],10],{k,1,10}]
```

$$1+N[\text{Sum}[1/\text{Fibonacci}[2^k], \{k, 1, 10\}]] \\ N[(7-\sqrt{5})/2]$$

【πの計算】

アルキメデス(B.C.287-212)は円に内接・外接する正96角形の周の長さを計算して $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を得た。3. 14まで正しい。

オランダのルドル(1540-1610)は円に内接・外接する正 2^{62} 角形の周の長さを計算して小数点以下第35位まで求めた。

ライプニッツ (1673) グレゴリ (1671) 収束が遅い

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\text{あるいは } \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \text{ において } x=1 \text{ とおく}$$

マチン (1706)

$$\pi = 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{239} \quad \arctan \text{ のマクローリン展開を用いる}$$

イギリスのシャンクス(1812-1882)は無限級数を用いて707位まで求めた。

これが長い間πの最良近似値とされていたが1946年に528位以下は誤りであることが発見された。

半径1の円に内接する正 2^n 角形の面積 S_n と、半径1の円に外接する正 2^n 角形の面積 T_n とを求め、 $n=2,3,4,\dots,20$ について、πの近似値としてどこまで正しいかを調べよ。

$$\text{オイラー (1736)} \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

証明1 $\sin x$ のマクローリン展開を利用する方法

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin x = 0 \text{ の解が } n\pi \text{ (} n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \text{) より}$$

$$= Ax(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2})(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2})\dots$$

係数比較から $A=1$ が分かる。ここで x^3 の係数が等しいことを用いると

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} - \frac{1}{(3\pi)^2} - \dots。 \text{これから } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ を得る。}$$

証明2 $f(x) = \pi - |x| (-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ展開による方法

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$$

$$x = 0 \text{ とおくと } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \text{ となり、これから}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{ゆえに } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ を得る。}$$

数列 $\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\}$ について

$n = 100, 200, \dots, 1000$ のときの値(の近似値)と $\frac{\pi^2}{6}$ の値を比較せよ。

ラマヌジャン (1914)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

チュドノフスキー (Maple Vで使用)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{6541681608}{640320^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{13591409}{545140134} + k \right) \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{(-1)^k}{640320^{3k}}$$

【eの近似値】

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n=10, 100, 1000, 10000$) を計算し、eの値と比較せよ。

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ のグラフを $[-1000, 1000]$ の範囲で描け。

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ($n=100, 200, \dots, 1000$) を計算し、eの値と比較せよ。

【オイラーの定数γまたはγ】

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx = -\gamma$$

γの近似値を求めよ。

$$N[\text{EulerGamma}, 30] = 0.57721566490153286060651209008$$

【カタラン数】

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \text{Catalan} = 0.915966$$

【黄金比】

黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は美術の世界で最も調和の取れた割合と考えられている。

Mathematica では、平面図形の出力窓の縦横比の既定値が 1 / GoldenRatio である。

N[GoldenRatio]=1.61803, N[1/GoldenRatio]=0.618034 である。

【いろいろな極限】

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ であることを、いろいろな x の値について説明すること。

スターリングの公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{nn^n} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$ から、十分大きい n について

$n! \approx \sqrt{2n\pi} n^n e^{-n}$ である。

n = 10, 100, 1000, 10000 の場合について、(近似式－真値) / 真値 の値を % で示すこと。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi} \quad (\text{ウォリスの公式}) \quad \text{から} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \frac{\pi}{2}$$

を導くこと。

【級数】

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{ライプニッツの公式})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - \frac{2}{2^s}) \zeta(s) \quad (\zeta \text{ はツェータ関数})$$

いろいろな s について $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$ を求める

$$\text{Sum}[(-1)^{(n+1)/n}, \{n, 1, \text{Infinity}\}]$$

【無限積】

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\sinh \pi}{\pi}$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)$$

$$\text{Product}[1-1/n^2, \{n, 2, \text{Infinity}\}]$$

【級数の収束・発散】 次の級数の収束・発散を調べよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n} - n^2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 2n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}$$