A3　集合の計算

【順列】

集合 B = {a, b, c, d, e} のすべての順列を求めよ。

また、集合 B から2個をとるすべての順列を求めよ。

６個の数字 0, 0, 1, 1, 2, 3 がある。これらの数字を全部使って６桁の整数をつくるとき、

１が先頭のものをすべて求めよ。

２が先頭のものをすべて求めよ。

これらの数字のうち４個を使って４桁の整数をつくるとき

１が先頭のものをすべて求めよ。

２が先頭のものをすべて求めよ。

７個の文字 A, A, B, B, C, C, C を１列に並べる。

並べた順列の全体を求めよ。

このうち、同じ文字が２つ以上連続して並ぶ順列の集合を求めよ。

同じ文字が２つ以上連続して並ばない順列の全体を求めよ。

【組合せ】

６個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 から３個をとるすべての組合せを求めよ。

６個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 から３個をとるすべての重複組合せを求めよ。

A＝{1, 2, 3, 4, 5, 6} のすべての部分集合を求めよ。

集合 D = {x, y, z} から4個をとるすべての重複組み合わせを求めよ。

【べき集合】

集合 A = {1, 2, 3, 4, 5} のすべての部分集合を求めよ。

【写像】

集合 A から集合 B へのすべての写像を求めよ。

集合 C から集合 D へのすべての写像を求めよ。

集合 D から集合 C へのすべての写像を求めよ。

【論理の計算】

命題 $p,\ q$ について、次の論理式の真理表を作れ。

論理和 $p \vee q$　　論理積 $p \wedge q$　　含意 $p \to q$

LogicalExpand を用いて、次のド・モルガンの法則を示せ。

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \qquad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$$

次の命題を簡単にせよ。

$$\overline{p} \to q \qquad \overline{p \to \overline{\overline{q}}}$$

$$(p \to q) \to r \qquad p \to (q \to r)$$

【個数カウント】

eやπの有効桁数１０００桁に現れる数字に 0, 1, 2,…, 9 がそれぞれ何回現れるか。

eやπの有効桁数１００００桁に現れる数字列に、0 が連続４回以上続くことがあるか。

【母関数】

n 個の文字 a, b, …, n の積 ab…n を隣合うものを括弧 ( ) で括るときの結合方法の数を c(n) とかく。

abc は (ab)c, a(bc) で２通り。

abcd は (((ab)c)d, (a(bc))d, (ab)(cd), a((bc)d), a(b(cd))) の５通り。

これから、

c(1) = c(2) = 1, c(3) = 2, c(4)=5

c(n)=c(1)c(n-1)+c(2)c(n-2)+⋯+c(n-1)c(1)　(n>2)

が成り立つ。

この式から直接 c(n) を求めること。

c(n) の母関数を

$$y = c(1) + c(2)x + c(3)x^2 + \cdots + c(n)x^{n-1} + \cdots$$

とおく。y^2 を計算し、$xy^2 - y + 1 = 0$ を得る。よって

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

であるが、x＝0 のとき、ｙ＝１であるから、プラス・マイナスはマイナスである。

マクローリン展開すると

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{8}(4x)^2 - \frac{1}{16}(4x)^3 - \cdots - \frac{2}{4^n n}{}_{2n-2}C_{n-1}(4x)^n - \cdots$$

これから

$$y = 1 + x + 2x^2 + \cdots + \frac{1}{n}{}_{2n-2}C_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

となり、c(n)＝$\frac{1}{n}{}_{2n-2}C_{n-1}$ を得る。それからも c(n) が求められる。

フィボナッチ数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ⋯ の母関数 を求める。

$$y = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots$$

とおく。これに

$$xy = \quad x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$$

を加えると

$$(1+x)y = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \cdots$$

$$= \frac{1}{x}(y-1)$$

ｙ について解くと

$$y = \frac{1}{1-x-x^2}$$

分母を因数分解し、部分分数に分けて

$$= \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\beta^n x^{n-1}\right)$$

ゆえに、

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)x^{n-1}$$

従って、一般項 a_n は $a_{n-1} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ である。ここで

α, β は $t^2 - t - 1 = 0$ を満たせばよいので $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

これから $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

自然数 n の分割を次の３通り考える。

P(n) = n をいくつかの整数の和（順序は問わない）に表わす方法の数

Q(n) = n をいくつかの異なる整数の和（順序は問わない）に表わす方法の数

K(n) = n をいくつかの奇数の和（順序は問わない）に表わす方法の数

例えば、n=10 のとき

<u>10</u> = $\boxed{9+1}$

= <u>8+2</u> = 8+1+1

= $\boxed{\underline{7+3}}$ =$\underline{7+2+1}$ =$\boxed{7+1+1+1}$

= $\underline{6+4}$ =$\underline{6+3+1}$ =6+2+2=6+2+1+1=6+1+1+1+1

= $\boxed{5+5}$ = $\underline{5+4+1}$ = $\underline{5+3+2}$ = $\boxed{5+3+1+1}$ = 5+2+2+1=5+2+1+1+1=$\boxed{5+1+1+1+1+1}$

=4+4+2=4+4+1+1=4+3+3=$\underline{4+3+2+1}$=4+3+1+1+1=4+2+2+2=4+2+2+1+1

=4+2+1+1+1+1=4+1+1+1+1+1+1

=$\boxed{3+3+3+1}$=3+3+2+2=3+3+2+1+1=$\boxed{3+3+1+1+1+1}$=3+2+2+2+1

=3+2+2+1+1+1 =3+2+1+1+1+1+1 =$\boxed{3+1+1+1+1+1+1+1}$

=2+2+2+2+2=2+2+2+2+1+1=2+2+2+1+1+1+1=2+2+1+1+1+1+1+1

=2+1+1+1+1+1+1+1+1=$\boxed{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}$

よって、P(10)=42， Q(10)=10， K(10)=10 である。

すべての n について、Q(n) = K(n) である。下の参考書に母関数を使った証明あり。

n を与えて、各種の分割の総数と、分割のリストを作るプログラムを作れ。

ルジャンドルの多項式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ の母関数は次の関数を z のべき級数に展開して得られる。即ち

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0(x) + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots \quad (|z|<1)$$

【ガロア対応】

２つの集合 M，Nの直積集合 M×N の部分集合 R が与えられているとする。

(a, b) が R に属すとき、a と b は（Rの）関係があるという。

Mの部分集合ＡとＮの部分集合Ｂに対して

$$A^R = \{y \in N \mid (a,y) \in R\ (\forall a \in A)\}$$

$$^R B = \{x \in M \mid (x,b) \in R\ (\forall b \in B)\}$$

とおく。空集合については $\phi^R = N,\ {}^R\phi = M$ とする。

次の関係が成り立つ。

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1^R \supset A_2^R \ ;\quad B_1 \subset B_2 \Rightarrow {}^R B_1 \supset {}^R B_2$$

$$^R(A^R) \supset A \ ;\quad ({}^R B)^R \supset B$$

$$({}^R(A^R))^R = A^R \ ;\quad {}^R(({}^R B)^R) = {}^R B$$

M の部分集合 A が ${}^R(A^R) = A$ となるとき、A を M の R 閉集合という。また

N の部分集合 B が $({}^R B)^R = B$ となるとき、B を N の R 閉集合という。

M の部分集合 A が R 閉集合である条件は、ある N の部分集合 B により $A={}^{R}B$ と表わされることであり、N の部分集合 B が R 閉集合である条件は、ある M の部分集合 A により $B = A^{R}$ と表わされることである。

M の R 閉集合の全体と、N の R 閉集合の全体との間には

$$A \to A^{R}, \quad {}^{R}B \leftarrow B$$

なる対応で１対１の対応がある。（ガロア対応）

M＝{1,2,3,4,5}, N={a,b,c,d} とし、M×N の部分集合 R を

R={(1,a),(1,b),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(4,b),(4,c),(4,d),(5,a),(5,b),(5,d)}

とおくとき、R 閉集合とガロア対応を求めよ。

参考書

現代応用数学の基礎 組合せ論・グラフ理論 野崎昭弘 日本評論社
組合せの基礎 C.ベルジュ（野崎昭弘訳） サイエンス社
数学序説―集合と代数 松阪和夫 実教出版