B1　線形代数

【連立一次方程式】

次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 \qquad + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$$

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & -9 & 5 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

のとき、連立一次方程式 $Ax=b, By=b$ を解け。

【行列式】　次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{matrix}\right|$$

.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{matrix}\right|$$

(Vandelmonde 行列式)

【プログラム作成】

行列の和や積を定義により計算するプログラムを作れ。

行列式の計算を、次の方法で行うプログラムを作れ。

定義による計算
第１行に関する展開
各行各列から取出した成分の積に順列の符号を付けて加える総和
掃き出し法による計算

連立一次方程式を解く計算を、次の方法で行うプログラムを作れ。

クラメルの公式
掃き出し法

与えられた行列の指定した次数の小行列式をすべて求めるプログラムを作れ。

行列の階数を求めるプログラムを作れ。

余因子行列を計算するプログラムを作ること。

逆行列を次の方法で計算するプログラムを作れ。

余因子行列による方法
掃き出し法

次の行列を大量に作るプログラムを作れ。

対称行列　　交代行列　　直交行列

B

エルミット行列　交代エルミット行列　ユニタリ行列
アダマール行列　シンプレティック行列

整数（－１０～１０）の乱数を９個発生させ、３次の行列を作り、その行列式が
－２０～２０となるものを４０個求めるプログラムを作れ。
（４０人の学生に別々の問題を与えること）

【対称行列・交代行列と行列の冪】

正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ を与えて、

A のトレースを求めよ。

$A=B+C$（B は対称行列、C は交代行列）と表せ。

A のｋ乗を求めよ。

【行列の積と行列式とトレース】

$M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ のとき、$|M|=a^3+b^3+c^3-3abc$ であることを用いて、
$a^3+b^3+c^3-3abc$ と $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の積はまた $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$
の形であることを示せ。

正方行列 B, C について $Tr(BC)=Tr(CB)$ であることを示せ。
正方行列 A, B, C について $Tr(ABC)\neq Tr(ACB)$ である例を求めよ。

【行列成分の指定】

行列 $a=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ について

第2行を取り出し、a2 とおけ。　第3列を取り出し、b3 とおけ。
第(2,3)成分を抜き出せ。　行数・列数を求めよ。

次のような行列を作れ。
ｎ次の単位行列

ｍ×ｎ型の零行列
行列単位 E_{ij}

逆対角線の成分が１で他の成分がすべて０のｎ次行列
ｎ次行列で、主対角線とその右上の部分の成分がすべて１で他の成分が０
ｎ次行列で、逆対角線とその右下の部分の成分がすべて１で他の成分が０
ｎ次行列で、その（ｉ,ｊ）成分が $\dfrac{1}{i+j-1}$ である行列（ヒルベルト行列）

λに対するｋ次のジョルダン細胞行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

３重対角行列 $\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}$

2n+1 次の確率推移行列 $\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$ $(p>0, q>0, p+q=1)$

反射壁をもつランダムウォークの場合

2n+1 次の確率推移行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(p>0, q>0, p+q=1)$

吸収壁をもつランダムウォークの場合

巡回行列 $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$

【線形写像】

行列$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$の表す一次写像 f について

一次変換 f の核の基底を求めよ。

一次変換 f の像の基底を求めよ。

平面ベクトルの２つの線形変換

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ -2x+4y \end{pmatrix} \qquad g:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y \\ 5x+2y \end{pmatrix}$$

について

線形写像の合成　$f \circ g$, $g \circ f$　と線形変換の逆変換　f^{-1}, g^{-1}　を求めよ。

次の原像の図形 G について、その像 $f(G)$, $g(G)$ の図形を求めよ。

直線：　$y = 2x+1$

円：　$x^2 + y^2 = 1$

四角形：(0, 0), (1,0), (1, 1), (0, 1) を頂点とする四角形

行列$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$で表される空間内の線形変換について

次の原像の図形 G は、どのような図形に移されるか。

直線：$\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y}{3\sqrt{2}} = z$

平面：$x + y + z = 1$

【終結式】　　ｘの２つの多項式

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m \quad (a_0 b_0 \neq 0)$$

に対して次の Sylvester の行列式（終結式 Resultant）を作れ。

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \\ 0 & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & 0 \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \\ 0 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$ （n+m 次）

【固有値】 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

【対角化】 次の行列を対角化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

【直交化】 次のベクトルをグラム・シュミットの方法で直交化すること。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

【ジョルダンの標準形】 次の行列のジョルダン標準形と変換行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

【単因子】　次の行列の単因子を求めよ。

$$\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x+2 \\ 1 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

【最小多項式】　次の行列の最小多項式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

【２次曲線の標準形】次の２次曲線の標準形を求め、曲線を描け。

$$5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-4x-17=0$$

$$x^2-2xy+y^2+5x-3y-2=0$$

【２次曲面の標準形】次の２次曲面の標準形を求め、曲線を描け。

$x^2+y^2+z^2+4xy+4yz+4zx+10\sqrt{6}z-9=0$　一葉双曲面

$2xy-6x+10y+z-31=0$　双曲放物面

$3x^2+y^2+3z^2-2zx+6x-2y-2z+2=0$　楕円面

$x^2+y^2+2z^2-2yz-2zx-2x+2y-6z+6=0$　楕円放物面

【指数行列】

実数 a に対して $e^a=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{a^k}{k!}$ であることの類似性として、正方行列 A について $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}A^k$ と定義する。右辺の行列の級数は必ず収束する。

`MatrixExp[A]` で求められる。

次の行列 A について $\exp(A)$ を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.11 & 0.12 \\ 0.21 & 0.22 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

参考書

演習線形代数（改訂版）村上正康・野澤宗平・稲葉尚志　培風館

詳説演習　線形代数学　　暫江誠夫・桑垣　煥・笠原晧司　培風館