C1 微分・偏微分とその応用

【$\varepsilon - N$ 法と $\varepsilon - \delta$ 法】 次の極限値の計算を $\varepsilon - N$ 法や $\varepsilon - \delta$ 法で証明せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

任意の正数 ε に対して、$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \ \ (n \geq N)$ となる N を ε で表せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}=0$$

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$$

任意の正数 ε に対して、$0<|x-3|<\delta$ なるとき、$\left|\sqrt{x+1}-2\right|<\varepsilon$ となる δ を ε で表せ。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

【極限値】 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} \quad (a,b>0) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a,b>0)$$

【極限点】 次の点列 $x_n=(x_1{}^{(n)},x_2{}^{(n)})$ あるいは $x_n=(x_1{}^{(n)},x_2{}^{(n)},x_3{}^{(n)})$ の極限点を求めよ。

$$\begin{cases} x_1{}^{(n)}=2-\dfrac{1}{2}x_2{}^{(n-1)} \\ x_2{}^{(n)}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}x_1{}^{(n-1)} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1{}^{(0)}=\dfrac{3}{2} \\ x_2{}^{(0)}=\dfrac{5}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1^{(n)} = -\dfrac{5}{12}x_1^{(n-1)} + \dfrac{19}{6}x_2^{(n-1)} + \dfrac{7}{4}x_3^{(n-1)} \\ x_2^{(n)} = -\dfrac{13}{12}x_1^{(n-1)} + \dfrac{23}{6}x_2^{(n-1)} + \dfrac{7}{4}x_3^{(n-1)} \\ x_3^{(n)} = \dfrac{5}{2}x_1^{(n-1)} - 6x_2^{(n-1)} - \dfrac{5}{2}x_3^{(n-1)} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1^{(0)} = -2 \\ x_2^{(0)} = 3 \\ x_3^{(0)} = -5 \end{cases}$$

係数行列を対角化して冪乗する方法による。

【連続性】 次の関数の $x = 0$ あるいは $(x, y) = (0,0)$ における連続性を調べよ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

【増加・減少の状態】 次の関数の原点の近くのグラフを描け。

$$f(x) = x^n \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (n = 0,1,2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 + \sin\dfrac{1}{|x|}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -x^2\left(1 + \sin\dfrac{1}{|x|}\right) & (x < 0) \end{cases}$$

x = 0 で増加の状態であるが、x = 0 のいくらでも近くに $f'(x) < 0$ となる点があり、そこで $f(x)$ は減少しており、x = 0 のいくらでも近くに $f(x) = 0$ となる点がある。

【微分可能・偏微分可能・全微分可能】 次の関数の指定した点の近傍のグラフを描け。

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x, y) = (0,0)) \end{cases}$$

原点で偏微分可能だが連続でない

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

原点で連続・偏微分可能だが全微分可能でない

【2 次偏微分係数】 次の関数の原点における第 2 次偏微分係数をすべて求めよ。

$$g(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases} \qquad g_{xy}(0,0)\neq g_{yx}(0,0)$$

$$g(x,y)=\begin{cases}x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-x^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases} \qquad g_{xy}(0,0)\neq g_{yx}(0,0)$$

【微分不可能関数】

高木関数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\phi(2^n x)}{2^n},\quad \phi(x)=\left|x-\left[x+\dfrac{1}{2}\right]\right|$

ワイエルストラス関数 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$

$0<a<1,\ b$ は奇数で $ab>1+\dfrac{3}{2}\pi$ をみたすもの。

これらは、すべての点で連続ですべての点で不連続な関数として知られている。

p[x_]:=Abs[x-Floor[x+0.5]]
f[x_,n_]:=Sum[2^(-k) p[2^k x],{k,0,n}] とおいて、
f[x,10] のグラフを [0, 4] の範囲で、f[x,20] のグラフを [0, 1] の範囲で描け。

A:=0.5; b:=11;
g[x_,n_]:=Sum[a^k Cos[b^k Pi x],{k,1,n}] とおいて、
g[x,4] のグラフを [-2,2] の範囲で描け。

【微分係数･導関数・高次導関数】

定義に従って、次の微分係数を求めよ。

$f(x)=\sqrt{x}$ のときの $f'(1)$

$f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ のときの $f'(1)$

$f(x)=\sin x$ のときの $f'(0)$

次の関数を微分せよ。

$$y=(x+1)^2(2x^2+3)^4$$

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)\quad (A\neq 0)$$

$$y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)\quad (a>b>0)$$

$$y=\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$y=\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\quad (|x|<1)$$

$x=\dfrac{3at}{1+t^3},\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\quad (a>0)$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$

$x^3-3axy+y^3=0\quad (a\neq 0)$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$

$z=\log(x^2-3xy+y^2),\ \begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ のときの $\dfrac{dz}{dt}$

次の関数の（高次）微分係数を求めよ。

$f(x)=\sinh x$ のときの $f'(0)+f'(1)+f'(2)$

$g(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ のときの $g^{(k)}(0)\quad (k=0,1,2,\ldots,10)$

【偏微分係数・偏導関数・高次偏導関数・関数行列式とヘッシアン】

$z=f(x,y)=\sin^{-1}\dfrac{x}{y}$ のときの $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

$z=f(x,y)=\sin(x+y)\cos(x-y),\ \begin{cases} x=\dfrac{u^2+v^2}{2} \\ y=\dfrac{u^2-v^2}{2} \end{cases}$ のときの $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$

$u=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\log(x^2+y^2)$ のとき $z_{zz}+z_{yy}$ を求めよ。

$h(x,y)=e^{ax}\cos by$ のときの $h_{xx}(0,0)+h_{yy}(0,0)$ を求めよ。

$g(x,y)=(x^2+y^2)(2x^2-3xy+4y^2)^5$ のときの $\dfrac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2}g(1,-1)$ を求めよ。

$z=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$ のとき、$\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$ を示せ。

$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ のとき、$u_x+u_y+u_z$ と $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を求めよ。

$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ のとき関数行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。更に、

$z=f(x,y)$ のとき、次の等式を証明せよ。

$$z_x{}^2+z_y{}^2=z_r{}^2+\frac{1}{r^2}z_\theta{}^2 \qquad z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$$

次の場合のヤコビアン $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ を求めよ。

$$u=x^2+y^2+z^2,\quad v=x+y+z,\quad w=xy+yz+zx$$

$$u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}},\quad v=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}},\quad w=\frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$ のとき、関数行列式 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$

を求めよ。更に、$u=f(x,y,z)$ のとき、次の式を証明せよ。

$$u_x{}^2+u_y{}^2+u_z{}^2=u_r{}^2+\frac{1}{r^2}u_\theta{}^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_\varphi{}^2$$

次の関数 f の Hessian $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$ とその関数行列式を求めよ。

$$f(x,y,z)=\log(xy+yz+zx)$$

$$f(x,y,z)=y^4+x^3z-(t+1)x^2z^2+txz^3$$

【接線・接平面】

次の関数の指定した点における接線・接平面の方程式を求め、グラフを示せ。

$y = e^x \quad (1, e)$

$z = e^x \cos y \quad (1, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{e}{\sqrt{2}})$

$z = f(x, y) = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{4} \quad (1, -1, \dfrac{11}{4})$

ここで、曲面を$\{(x, y) \mid -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$ の範囲で、
接平面を$\{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$ の範囲で描け。

【テーラー展開】

次の関数のマクローリン展開・テーラー展開を求めよ。（中心、n＋1次が剰余項とする）

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}} \quad (x = 0, \quad n = 10)$

$f(x) = x^2 e^x \quad (x = 0, \quad n = 10)$

$f(x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x = 1, \quad n = 10)$

$f(x, y) = e^x \cos y, \quad ((x, y) = (0,0), n = 10)$

【極大極小】

次の関数の極値を求めよ。

$f(x) = x + 2\cos x \quad (0 \le x \le 2\pi)$

$f(x) = (x-1)^2 e^{x+1}$

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (-\dfrac{\pi}{2} \le x, y \le \dfrac{\pi}{2})$

次の関数のヘッシアンを調べ、極値を求めよ。

$z = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 4xy$

$z = 3x^4 - 3x^2 y + y^2$

$$f(x, y, z) = -\frac{47}{12}x^2 - \frac{83}{12}y^2 + \frac{11}{6}z^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{2}{3}xz + \frac{2}{3}yz$$
$$- \frac{65}{3}z + \frac{65}{6}y - \frac{1}{6}x + x^3 + y^3 + \frac{787}{12}$$

次の陰関数で定まる z の極値を求めよ。

$$2x^2 + z^2 + y^2 z - x^2 z = 2$$

【陰関数】次の式で定義される x の陰関数 y, z について

$x^3 y^3 + y - x = 0$ から y', y'' を求める。

$xyz = a,\ xy + yz + zx = b$ から y', z' を求める。

【条件付き極値問題】

$x^2 + y^2 = 1$ の条件の下で xy の極値を求めよ。

$x^2 + y^2 = 1$ の条件の下で $x^2 - 4xy - 2y^2$ の極値を求めよ。

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の条件の下で $x + y + z$ の極値を求めよ。

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の条件の下で xyz の極値を求めよ。

【最大最小問題】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ の点 $(0, b)$ を通る弦の最大値を求めよ。

周が一定値 $2s$ の三角形のうち、面積が最大となるものを求めよ。

楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ に内接する直方体の体積の最大値を求めよ。

空間に n 個の点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が与えられたとき、$\sum_{i=1}^{n} P_i Q$ が最小となる点 Q を求めよ。

【漸化式】 次の高次導関数についての漸化式を示せ。

$y = \sin^{-1} x$ のとき

$$(1 - x^2) y^{(n+2)} - (2n+1) x y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, 10)$$

$y = \tan^{-1} x$ のとき

$$y^{(n+1)} = n! \sin\left\{(n+1)(y + \frac{\pi}{2})\right\} \cos^{n+1} y \quad (n = 1, 2, \cdots, 10)$$

$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ のとき

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_n(x) = n\left(x P_n(x) - P_{n-1}(x)\right)$$

【特異点】 次の曲線の特異点を求め、特異点の周辺を描け。

$y^2 - (x-2)^2(x-1) = 0 \quad (0 \le x \le \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2})$

$y^2 - 2x^2 y + x^4 - x^5 = 0 \quad (0 \le x \le \frac{6}{5}, -\frac{1}{5} \le y \le 3)$

$x^4 + x^2 y^2 - 6x^2 y + y^2 = 0 \quad (-3 \le x \le 3, 0 \le y \le 4)$

【包絡線】 次の曲線群とその特異点の軌跡および包絡線を描け。

$f(x, y, \alpha) = (y-\alpha)^2 - x(x+1)^2 = 0$

$f(x, y, \alpha) = x^2 + y^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha = 0$

$f(x, y, \alpha) = \dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha} - 1 = 0$

Ans：２式 $f(x, y, \alpha) = 0,\ f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ を解いて $x = x(\alpha),\ y = y(\alpha)$ を求める。

$x = 0, \quad x = -1$

$x^2 + y^2 = 4$

$x = \cos^3\alpha, \quad y = \sin^3\alpha$

【曲率・曲率半径】 次の関数の曲率 κ と曲率半径 ρ を求めよ。

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$

$r = a(1+\cos\theta)$

Ans： $y = f(x)$ のとき曲率は $\kappa = \dfrac{f''(x)}{[1+\{f'(x)\}^2]^{3/2}}$，曲率半径は $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

曲率半径は $a \quad \pm 3(axy)^{1/3} \quad \dfrac{2}{3}\sqrt{2ar}$

【縮閉線】 次の関数とその縮閉線を描け。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

cycloid $x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t) \quad (a > 0)$

放物線 $y^2 = 4px$

Ans： $y = f(x)$ の縮閉線は $x = \alpha - \dfrac{f'(\alpha)(1+f'(\alpha)^2)}{f''(\alpha)}$, $y = f(\alpha) + \dfrac{1+f'(\alpha)^2}{f''(\alpha)}$

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x = a(t + \sin t),\ y = -a(1 - \cos t)$$

$$27py^2 = 4(x - 2p)^3$$