C2 積分・重積分とその応用

【収束半径・収束域】 次の整級数の収束半径・収束域を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}$$

【関数項級数・関数列と極限関数】 次の関数列をグラフで示すこと。
極限関数へ一様収束するか否かも示すこと。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^2} \quad (|x| \le \pi) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{2x}{x^2 + n^2}$$

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \quad [0, 1] \qquad f_n(x) = xe^{-nx} \quad [0, \infty)$$

$$f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2} \qquad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \text{ と } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

【不定積分】 次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} \qquad \int \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (|a| \ne |b|) \qquad \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^7} dx$$

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}} \qquad \int x^3 \sqrt{\frac{1 - x}{x + 1}} dx$$

$$\int \sin^{10} x dx \qquad \int \frac{dx}{a + b\tan x} \quad (ab \neq 0)$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad \int \frac{\log(\log x)}{x} dx$$

【積分で定義される関数】 次の不定積分を求めよ。

$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$ LogIntegral[x] 積分対数関数

x より小さい素数の数の評価に現れる

$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ExpIntegralEi[x] 積分指数関数

量子力学に現れる

$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ SinIntegral[x] 積分正弦関数

$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ CosIntegral[x] 積分余弦関数

Si, Ci は通信工学に現れる

$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt$ FresnelS[x] フレネル積分

$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt$ FresnelC[x] フレネル積分

波動の回折，高速自動車道の設計に現れる

$$\int e^x \log x dx \qquad \int \log(\log x) dx$$

【定積分・広義積分】 次の定積分・広義積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$$

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx \qquad \int_0^a \frac{x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (a > 0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 + 5\sin x} \qquad \int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0)$$

$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ $\int_0^5 \sin(x^2)dx$ （数値積分）

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ （ガンマ関数）

【有名な広義積分】次の広義積分を求めよ。

$\int_0^1 \log|\log x|dx = \int_0^\infty e^{-t}\log t dt = -\gamma$ オイラーの定数

$\int_0^1 \frac{-\log x}{1+x^2}dx = \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin\theta}d\theta = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ カタラン数

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$ $\int_0^\pi x\log\sin x dx = -\frac{\pi^2}{2}\log 2$

$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}$ $\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{8}$

$\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)dx = \int_{-\infty}^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

$\int_0^\infty \sin(x^3)dx$ $\int_0^\infty \cos(x^3)dx$ $\int_0^\infty \sin(x^4)dx$ $\int_0^\infty \cos(x^4)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x}dx$

$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx \ (t>0)$ $\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}dx \ (t>0)$

古典的には複素関数の留数定理やラプラス変換を用いて計算する。

$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log x}dx \quad (a>-1, b>-1)$ Frullani の積分

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ のときの $\int_{-\infty}^\infty (x-m)^2 f(x)dx$

【リーマン和の計算とグラフ】

リーマン和の定義を説明する図を作成すること。すなわち、定義に従って、閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して区間の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ と各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表 ξ_k を使ったリーマン和 $R_\Delta = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ を表示す

るグラフを描くこと。ここで、ｎを与えて分点は乱数によって定める。 $f(x)$ を与えて $[x_{k-1}, x_k]$ における長方形を描き、$(\xi_k, 0)$ と $(\xi_k, f(\xi_k))$ は点線で結ぶこと。

【漸化式を使う計算】

$L(x,n) = \int \frac{dx}{(x^2+c^2)^n}$ とおく。

$$L(x,1) = \int \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c} Tan^{-1} \frac{x}{c}$$

$$L(x,n) = \frac{1}{(2n-2)c^2} \left\{ \frac{x}{(x^2+c^2)^{n-1}} + (2n-3)L(x,n-1) \right\} \quad (n \ge 2)$$

であることを使って、$L(x,n)$ を計算するプログラムを作れ。また、これを用いて、$L(x,n) \quad (n = 1,2,\ldots,10)$ を求めよ。

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$ (m,n は整数) とおく。

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \quad (m+n \ne 0)$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \quad (m+n \ne 0)$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n} \quad (m \ne -1)$$

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2} \quad (n \ne -1)$$

m,n の場合に応じて $I_{0,0}, I_{1,0}, I_{0,1}, I_{-1,0}, I_{0,-1}, I_{1,-1}, I_{-1,1}, I_{1,1}, I_{-1,-1}$ に帰着させるプログラムを作れ。これを用いて、次の不定積分を求めよ。

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \qquad \int \sin^5 x \cos^{-3} x dx \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$J_n = \int \tan^n x dx$ とおく。

$J_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \quad (n \ge 2)$ を示せ。

$J_n \quad (n = 1,2,\cdots,10)$ を求めよ。

【大量の不定積分の問題作成】

有理関数（分子が２次式で分母が一次因子と２次因子の積程度のもの）の不定積分の問題を４０個つくり、同時にその解答を表示するプログラムを作れ。ここで多項式関数の係数は －９から９の範囲で乱数によって定めるものとする。

【項別積分】 被積分関数を k について展開して項別積分し、次の式を導け。ただし $0 < k^2 < 1$ とする。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4-\frac{5}{256}k^6-\cdots\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\frac{25}{256}k^6+\cdots\right)$$

【面積】 次の関数で囲まれた図形を表示しその面積を求めよ。

$$y=\sin x,\quad y=\cos x\quad \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)$$

$$y = x\log x,\quad y=0\quad (0<x\le 1)$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad y=0\quad (-1\le x\le 1)$$

$$y^2=ax,\quad x^2=by\quad (a,b>0)$$

$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}\quad (a>0)$$

$x=t-t^3,\quad y=1-t^4$ の自閉線

【回転体の体積】 次の曲線を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積を求めよ。

円 $x^2+(y-b)^2=r^2 \quad (0<r<b)$

放物線 $y=\sqrt{x}\ (0\le x\le 1)$

放物線 $y=x^2\ (0\le x\le 1)$

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}\,(1\le x<\infty)$

$y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$

【体積】 次の立体のグラフを描き、その体積を求めよ。

錐面 $z = a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$ と 2 平面 $z = x,\quad x = 0$ で囲まれる立体

放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ で囲まれる立体

球 $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ と 円柱 $x^2 + y^2 \le ax$ $(a > 0)$ の共通部分

2つの円柱 $x^2 + y^2 \le a^2$ と $x^2 + z^2 \le a^2$ $(a > 0)$ の共通部分

【表面積】 次の曲面の表面積を求めよ。

放物線 $y = \sqrt{x}\ (0 \le x \le 1)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転面の面積

双曲線 $y = \dfrac{1}{x} (1 \le x < \infty)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転面の面積

回転体の体積は有限であるが、曲面積は無限大である。

放物線 $y = x^2\ (0 \le x \le 1)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転面の面積

$y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転面

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$

円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ の内部にある円柱 $x^2 + z^2 = a^2$

円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ の内部にある双曲放物面 $z = xy$

曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ の $4x^2 + 3y^2 + z^2 \le 2z$ の部分

【曲線の長さ】 次の曲線の全長を求めよ。

カテナリ $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{a}{2}}\right)$ $(a > 0),\quad 0 \le x \le p)$

曲線 $y = \log\cos x$ $(0 \le x \le \dfrac{\pi}{3})$

追跡線 $x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ $(a > 0),\quad (\dfrac{a}{2} \le y \le a)$

トロコイド $x = t - b\sin t,\quad y = 1 - b\cos t$ $(0 < b < 1)$

曲線 $r = a\sin^3 \dfrac{\theta}{3}$ $(a > 0)$

空間曲線 $x = \sqrt{2}t, \quad y = e^{t}, \quad z = e^{-t} \quad (0 \le t \le a)$

【反復積分】 次の積分を計算せよ。

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y\, e^{xy} dy$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos\frac{\pi x}{\sqrt{y}} dy$$

$$\int_1^e dx \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x} dy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} r^2 dr$$

次の積分順序を変更して計算せよ。

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \cos\pi x dy$$

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y e^{x^2} dx$$

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2} dy \quad (a>0)$$

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{\sin^{-1}x}{2}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{\cos y}} dy$$

【二重積分】 次の二重積分を求めよ。

$$\int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xydydx \quad D = \{(x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos\frac{\pi x}{y} dy \quad D = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 1\}$$

$$\iint_D \cos(e^{xy}) dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x, 0 \le y\}$$

$$\iint_D x^2 y^2 (x^2 - y^2) dxdy \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2\}$$

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy \quad D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ x+1\le y\le y+1\}$$

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy \quad D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \quad D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$$

【三重積分】 次の三重積分と四重積分を求めよ。

$$\iiint_B (x+y)zdxdydz$$

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\quad x\le y\le 1\}$$
$$B=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\quad 0\le z\le x+y\}$$

$$\iiint_B ydxdydz$$

$$D=\{(x,z)\,|\,-1\le x\le 1,\quad 0\le z\le \sqrt{1-x^2}\}$$
$$B=\{(x,y,z)\,|\,(x,z)\in D,\quad z-1\le y\le z+1\}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} (x^2+y^2+z^2)dxdydz \quad (a>0)$$

$$\iiint_K \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \quad K=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

$$\iiint_K \frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} \quad K=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1\}$$

$$\int\iiint_{x^2+y^2+z^2+w^2\le a^2} (x^2+y^2+z^2+w^2)dxdydzdw \quad (a>0)$$

参考書

改定新版　微分積分学　蛯原幸義・黒瀬秀樹他　学術図書出版社　１９９３

微分積分学入門　　　　岡安隆照・吉野　崇他　裳華房　　　　　１９８８

理工系基礎課程　微分積分　　宮崎虔一　　　　学術図書出版社　１９８８