

C3 複素解析

【複素数の四則計算】

Mathematica では虚数単位は I である。

<<Algebra`ReIm` をロードしておく

$\text{Re}[z]$ は z の実部 $\text{Im}[z]$ は z の虚部

$\text{Abs}[z]$ は z の絶対値 $\text{Arg}[z]$ は z の偏角

$\text{Conjugate}[z]$ は z の共役複素数

次を計算せよ。

$$\sqrt{-4}$$

$$(3+2i)-(7-4i)$$

$$1+i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{12}$$

$$\frac{4+3i}{2-i}$$

$\alpha = 4+3i$ の絶対値と偏角を求めよ。 α の共役複素数を求めよ。

$z = a + I b$ で a, b が実数であることを宣言すること。

$a/: \text{Im}[a]=0;$

$b/: \text{Im}[b]=0;$

【高次代数方程式の解の複素数表示】

Solve により解いた3次方程式の解では、虚数単位 I により整理されていないことがある。

$x^3 - x + 1 = 0$ の3つの解を $a + I b$ の形で表現すること。

【ガウスの整数】

$a + bi$ (a, b は整数)の形の複素数をガウスの整数という。

ガウスの整数として、単元（逆元をもつ元）は $1, -1, i, -i$ の4つである。

$2 = (-i)(1+i)^2$ と表され、 $1+i$ は素数である。

FactorInteger は整数の範囲での因数分解であるが、ガウスの整数まで広げて計算するには、FactorInteger[n,GaussianIntegers->True] とする。

多項式の素因数分解をガウスの整数の範囲で行うには
Factor[expr,GaussianIntegers->True] とする。

例えば $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

2 は整数としては素数だが、ガウスの整数としては素数ではない。このような素数を 100 までの素数の中から探すこと。

【複素平面（ガウス平面）】 複素数を複素平面上の点として表示させること。

$\alpha = 4 + 3i$ を表示させるには、

```
a=4+3I;
```

```
ListPlot[{{Re[a],Im[a]}}, PlotStyle->PointSize[0.03],  
PlotRange->{{-1,5},{-2,4}}, AspectRatio->Automatic]
```

$\alpha = 0.4 + 0.3i$ のとき、点列 $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^7\}$ を表示させるには、

```
a=0.4+0.3I;
```

```
t=Table[a^n,{n,1,7}];
```

```
tri=Transpose[{Re[t],Im[t]}];
```

```
ListPlot[tri, PlotRange->All, PlotStyle->PointSize[0.02]]
```

1 の 17 乗根のリストをガウス平面上にプロットすること。

7 次方程式 $z^7 + 3z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$ の解をガウス平面上にプロットすること。

点列 $\{I, I^I, I^{I^I}, I^{I^{I^I}}, I^{I^{I^{I^I}}}, \dots\}$ (50 回の冪まで) のプロット。

【初等関数】

実変数の場合と同じである。

$w = f(z)$ のように利用できる。従って z^2 や $\sin[z]$, $\log[z]$ 等が使える。

ComplexExpand または ExpToTrig により、実部と虚部に分けよ。

e^{2+3i} , $\sin(2+3i)$, $\log(2+3i)$ を数値近似させる。(//N を付ける)

$\exp(x+iy)$, $\sin(x+iy)$, $\log(x+iy)$ を定義式のように展開する。

初等関数の絶対値のグラフを描くこと。

$|\sin z|$, $\left|z - \frac{z^3}{6}\right|$, $|\cos z|$, $|\tan z|$, $|\log z|$ など

例えば、ComplexExpand[Sin[x+I y] により、実部・虚部がわかるので

$f[x_, y_] := ((\text{Sin}[x] \text{Cosh}[y])^2 + (\text{Cos}[x] \text{Sinh}[y])^2)^{1/2}$ を Plot3D で描く。

次の公式を示せ。

$$\sin^{-1} z = i \log(-iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\cos^{-1} z = i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \frac{i-z}{i+z} = \frac{i}{2} \log \frac{1-iz}{1+iz}$$

【正則関数】

領域D上の複素関数 $w = u + vi = f(z) = f(x + yi)$ が正則である必要十分条件は、

D上でコーシー・リーマンの関係式： $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ である。

$f(z) = z^2, \quad f(z) = \frac{1}{z} (z \neq 0), \quad f(z) = \sin z$ が正則であることを示せ。

$u(z) = u(x + yi) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ に対し $v(z)$ を見つけて、 $f(z) = u(z) + v(z)i$ がC上正則となるようにせよ。ただし、 $f(0) = 0$ とする。

微分は実質的に実変数と変わらない。

Exp[2 z -3 I] を z で微分せよ。

Sin[2 z] を z について4回微分せよ。

【級数展開と留数】

関数 $f(z)$ が a を中心とする2つの同心円の間の円環内で解析的であれば次のべき級数の形に一通りに表される：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (\text{ローラン級数})$$

ここで

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

で、Cは円環内の閉曲線で、点aを反時計周りに回るものとする。

$c_n = 0$ ($n < 0$) のときは、テーラー展開である。

$c_n \neq 0$ ($n < 0$) となるnがあるとき、 c_{-1} をaにおける $f(z)$ の留数という。

関数 $f(z)$ が $z = a$ で正則ならば $\text{Series}[f[z], \{z, a, n\}]$ で $z = a$ の周りの $f(z)$ のテーラー展開の n 次までの項が得られる。 $z = a$ が $f(z)$ の除去可能な特異点あるいは極ならば、 $\text{Series}[f[z], \{z, a, n\}]$ は $z = a$ を中心とする $f(z)$ のローラン展開を計算する。 $z = a$ が $f(z)$ の真性特異点のときは、その旨のメッセージが表示される。

関数 $f(z)$ の特異点 $z = a$ における留数は $\text{Residue}[f[z], \{z, a\}]$ で求まる。

次のテーラー展開またはローラン展開を指定した次数まで求めよ。

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} \quad z = 0 \text{ を中心に 6 次まで}$$

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} \quad z = 1 \text{ を中心に 4 次まで}$$

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} \quad z = 0 \text{ を中心に 4 次まで}$$

$$\cos \frac{1}{z} \quad z = 0 \text{ を中心に 4 次まで (真性特異点)}$$

$$\cos \frac{1}{z} \quad z = \infty \text{ を中心に 6 次まで } (\infty \text{ は無限遠点})$$

関数 $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ の特異点 $z = 1, -3$ における留数を求めよ。

【積分】 次の計算をすること。

$$\int_C z^2 dz \quad \text{ただし、} C \text{ は } 2 + 3i \text{ と } 4 + 6i \text{ を結ぶ線分とする。}$$

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz \quad \text{ただし、} C \text{ は } a \text{ を中心とし、半径 2 の円周とする。}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2} dz$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z}{z - \pi/2} dz$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{e^{tz}}{z-1} dz \quad (\text{但し、} t \text{ は実数とする})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz \quad (\text{但し、} t \text{ は実数とする})$$

【部分分数展開と無限積】 次の等式を説明すること。

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2} \qquad \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n\pi} \right)^2 \right) \qquad \cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi} \right)^2 \right)$$

【複素数の表す点の軌跡】

点 $P(z)$ が、原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、複素数 $w = \frac{z+1}{z-1}$ を表す点 $Q(w)$ の軌跡を図示せよ。

点 $P(z)$ が、点 $z_0 = 1+i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、複素数 $w = \frac{1-iz}{1+iz}$ を表す点 $Q(w)$ の軌跡を図示せよ。

【複素乱数】

`Random[Complex]` は単位正方形内の複素数疑似乱数を発生させる。

実部が $[0, 20]$ の範囲に、虚部が $[0, 10]$ の範囲の複素数乱数を発生させること。
複素平面上の長方形 $[0, 20] \times [0, 10]$ に 1000 個の乱数をプロットすること。

【代数学の基本定理（ガウス）のグラフィカルな証明】

複素数を係数とする n 次多項式 $f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$ ($c_0 = 1$) について、
代数方程式 $f(z) = 0$ は解をもつことを、次の方法で示すこと。

任意の代数方程式にするため、次数 n を定め、複素係数を乱数により n 個求める。
 z を全複素平面を動かすとき、 $f(z)$ が原点を通ることを次のように示す。まず

複素数 z を極座標で $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表す。 z が $|z| = r$ の円を一周するとき、 z^n は、半径 r^n の円を n 周する。 r が十分大きければ、 z^n だけでなく z^n とほぼ等しい $f(z)$ も原点から離れた円に近い軌道をやはり n 周する。一方、 r を小さくしていくと、

$\lim_{r \rightarrow 0} f(z) = c_n$ であるから、これらのループは極限点 c_n に至る。ここで、 $f(z)$ の連続性

から、 r を小さくしていくと、ある r について、そのループは原点を通過するはずである。この様子をアニメで示すこと。

点を中心とする正方形 $-10-10I \sim 10+10I$ に 5 個の複素乱数のテーブルを求めるには

```
c=Table[Random[Complex,{-10-10I,10+10I}],{5}]
```

これらを係数とする 5 次のモニック多項式 $f(z)$ を求めるには

```
f[z_]:=Sum[c[[k+1]] z^k, {k,0,4}]+z^5
```

半径 10 の単位円を z が一周するときの $f(z)$ の描く曲線は

```
<<Algebra`ReIm`
```

```
r=10;
```

```
z:=r (Cos[t]+ I Sin[t]);
```

```
ParametricPlot[{Re[f[z]],Im[f[z]]},{t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]
```

【等角写像のグラフ】

z 平面の領域 D を定義域とする正則関数 $w = f(z)$ は D から w 平面への等角写像を引き起こす。CartesianMap と PolarMap を用いてこの様子を見ることが出来る。

```
<<Graphics`Master`
```

```
cmf:=CartesianMap[f,{a,b},{c,d}];
```

```
Show[cmf]
```

によって、長方形の領域 $D=[a,b] \times [c,d]$ における格子線群の、 w 平面の（直交）曲線群に変換された跡が見える。

また、PolarMap[f,{r1,r2},{ α , β }] では、扇形の領域 $D=[r1,r2] \times [\alpha, \beta]$ における同心円群と放射線群が、関数 f によって写された跡が見える。

次は原像と像を横に並べて示すプログラムである。

```
<<Graphics`Master`
```

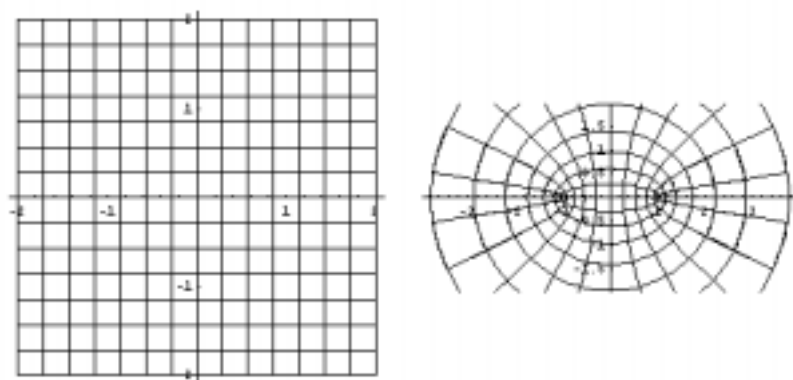
```
id[z_]=z;
```

```
c:=CartesianMap[id,{-2,2},{-2,2},DisplayFunction->Identity];
```

```
f[z_]=Sin[z];
```

```
d:=CartesianMap[f,{-2,2},{-2,2},DisplayFunction->Identity];
```

```
Show[GraphicsArray[{c,d}]]
```



次の関数の原像と像を並べて示すこと。

$$w = \exp[z] \quad \text{CartesianMap} \quad D = [0, 1] \times [0, \pi]$$

$$w = \sin[z] \quad \text{CartesianMap} \quad D = [0, \pi] \times [0, 1]$$

$$w = z^3 \quad \text{PolarMap} \quad D = [0, 1] \times [0, 2/3 \pi]$$

$$w = z^{1/3} \quad \text{PolarMap} \quad D = [0, 1] \times [-0.98\pi, 0.98\pi]$$

$$w = \log[z] \quad \text{PolarMap} \quad D = [0, 1] \times [-0.98\pi, \pi]$$

$$w = z/(3z-1) \quad \text{CartesianMap} \quad D = [-2, 2] \times [-2, 2]$$

次の関数による単位円の像は何か。

$$w = \cosh^{-1} z$$

$$w = \tan z$$

参考書

郡 敏昭 複素関数の解析学 遊星社 1997

難波 誠 複素関数三幕劇 朝倉書店 1990

岸 正倫・藤本坦孝 複素関数論 学術図書出版社 1980

田沢義彦 Mathematicaによる工科の数学 東京電機大学出版局 1995

Gray & Glynn, Exploring Mathematics with Mathematica

松本幸夫 1, 2, 4, オイラー ～トポロジーの話～

第23回日本数学会市民講演会・早稲田大学 2000・3・26