D1　関数グラフ

【平面曲線Ⅰ】　直交座標で表わされた次の関数のグラフを描け。

$$y=|x+2|+|x+1|+|x|+|x-1|+|x-2|$$

$$y=\begin{cases}-x^2-4x-3 & (x<-1)\\ x^2-1 & (-1\leq x\leq 1)\\ -x^2+4x-3 & (1<x)\end{cases}$$

$f(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}$ (−5≦x≦5)（$\sin x$ の 7 次までのマクローリン展開式）

$f(x)=\dfrac{4}{\pi}(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{\sin 7x}{7})$ (−5≦x≦5)

符号関数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ (−π≦x≦π）のフーリエ展開

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$　（標準正規分布関数）

$f_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ のとき、$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を同時に描く。

確率統計に現れる自由度ｎのｔ分布で、その極限関数は標準正規分布関数。

$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$　$(a>0)$　（追跡線・牽引線 tractrix）

点$(0, a)$を先点としｘ軸を漸近線とする曲線で、 曲線上の接点からｘ軸までの距離は一定である。カテナリの伸開線である。

【平面曲線Ⅱ】　媒介変数表示で表わされた次の関数のグラフを描け。

$x=\dfrac{3at}{1+t^3}, y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ $(a>0)$（デカルトの正葉形）

（t を消去すると、$x^3-3axy+y^3=0$）

点 P(x, y) の x, y が単振動である曲線（リサージュ曲線）

$$x=r_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1), y=r_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$x=\int_0^s \cos u^2 du, y=\int_0^s \sin u^2 du$　（クロソイド曲線）（x, y は s の関数）

ジェットコースターや高速道路の設計に使用される。

サイクロイド cycloid $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$

トロコイド trochoid $\begin{cases} x = t - b\sin t \\ y = 1 - b\cos t \end{cases}$

サイクロイドは直線に沿って動く円上の定点の軌跡であったが、
トロコイドは定点が円の中心から距離 b にある場合である。
（円の半径＝１）
b を引数として関数 trochoid[b_] がトロコイドを表示するようにせよ。
特に　b=0.6，1.5 の場合を描け。

内サイクロイド hypocycloid $\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos\dfrac{a-b}{b}t \\ y = (a-b)\sin t - b\sin\dfrac{a-b}{b}t \end{cases}$

大きい円の内部を小さい円が滑らずに回転していくとき、小さい円の上の
定点の軌跡である。大きい円の半径を a，小さい円の半径を b とする。
特に a=6，b=1　や　a=9，b=7 の場合を描け。

外サイクロイド epicycloid $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\dfrac{a+b}{b}t \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\dfrac{a+b}{b}t \end{cases}$

ある円Ｃに外部で接しながら滑らずに移動する円の上の定点の軌跡である。
Ｃの半径を a，移動する円の半径を b とする。
特に a=1，b=1　や　a=2，b=3 の場合を描け。

内トロコイド hypotrochoid $\begin{cases} x = (a-b)\cos t + c\cos\dfrac{a-b}{b}t \\ y = (a-b)\sin t - c\sin\dfrac{a-b}{b}t \end{cases}$

半径 a の円Ａの内部を半径 b の円板Ｂが滑らずに回っていくとき、円板
Ｂの定点Ｐ（Ｂの中心から距離 c < b にある）の軌跡である。
特に a=36，b=21,c=18 や　a=117，b=15，c=60 の場合を描け。

外トロコイド epitrochoid $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - c\cos\dfrac{a+b}{b}t \\ y = (a+b)\sin t - c\sin\dfrac{a+b}{b}t \end{cases}$

半径 a の円Ａの内部を半径 b の円板Ｂが滑らずに回っていくとき、円板
Ｂの外に突き出た定点Ｐ（Ｂの中心から距離 c > b にある）の軌跡である。
特に a=10，b=1，c=8　や　a=20，b=1，c=2 の場合を描け。

小さい円が転がっていくときの、定点の軌跡をアニメーションで見せること。

【平面曲線III】　極座標で表わされた次の関数のグラフを描け。

$r = a\theta (a > 0)$（アルキメデスの螺線）

$r = \sin\dfrac{p}{q}\theta$　ここで　$(p, q) =$　(2,1),(3,1),(12,1),(4,7),(3,13),(13,4)

4つ葉　三つ葉　マーガレット　　菊花

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$（連珠形・レムニスケート）

（直交座標では　$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$）

リマソン　limason　$r = a\cos t + b$

a=1, b=0.4 や　a=1,b=1.1 の場合を描け。

コンコイド concoid　$r = a\sec t + k$

シッソイド cissoid　$r = f_1(\theta) - f_2(\theta)$

$r = \sec\theta - \cos\theta$　や　$r = 1.8\cos\theta - \dfrac{2}{1 - 0.5\cos\theta}$　場合を描け。

$r = e^{\sin\theta} - 2\cos 4\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$（蝶が羽を広げたように見える）

$$r = \frac{100}{100 + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^8}\left(2 - \sin 7\theta - \frac{\cos 30\theta}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\right)$$（かえでの葉）

【空間曲線】　媒介変数表示された次の関数の曲線を描け。

$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 5\ (0 \le \theta \le 2\pi)$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点 $A(1,0,0)$ から $N(0,0,1)$ へ至るこの球面上に沿う道をいろいろ描くこと。

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に子午線と経線をえがくこと。

【曲面 I 】直交座標のとき

ソンブレロ（山高帽）

$$z = 30\cos\sqrt{x^2 + y^2} + 3\cos\sqrt{x^2 + y^2} \quad (-10 \le x, y \le 10)$$

高い山と深い海

$$z = \frac{1000}{\sqrt[4]{(x-50)^2 + (y-50)^2 + 100}} - \frac{1000}{\sqrt[4]{(x+50)^2 + (y+50)^2 + 100}}$$

$$(-150 \le x, y \le 150)$$

輪環面・トーラス torus

$$\{((a + b\cos u)\cos v,\ (a + b\cos u)\sin v,\ b\sin u)) \mid 0 \le u, v \le 2\pi\} \quad (a > b > 0)$$

常螺旋面・ヘリコイド helicoid

$$\{(u\cos v,\ u\sin v,\ v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\}$$

【曲面II】極座標　P(θ,φ,r)

ｒ＝ＯＰ，　ｓはｚ軸からＯＰまでの緯度の角，ｔはｘ軸からＰまでの経度の角

(0≦r，0≦θ≦2π，0≦φ≦π)

極方程式 r = f(θ，φ) の曲面を描くには、

```
<<Graphics`ParametricPlot3D`
SphericalPlot3D[r,{s,s0,s1},{t,t0,t1}]
```

次の曲面を描くこと。

r = 3 原点を中心とする半径３の球

```
SphericalPlot3D[3,{s,0,2Pi},{t,0,Pi}]
```

r = 1 + k Cos[n s]

k = 0.3 や 0.5, n = 3 や 5 等で面白い形が得られる。

分割数を増やしてオプション　PlotPoint->30 等とする。

```
SphericalPlot3D[1+0.3 Cos[4s],{s,0,Pi},{t,0,2Pi},
                    PlotPoints->40, ViewPoint->{2,1,0.3}]
```

r = t や r = 2 + Sin[5s] Sin[3t]

```
SphericalPlot3D[t,{s,0,2Pi},{t,0,2Pi},ViewPoint->{2,1,0.7}]
```

【曲面III】円柱座標のとき

平面の極座標　(r,θ)に、ｚ座標を付けて空間の点を (r,θ,z) で表す。

円柱座標方程式 z = f(r,θ)のグラフを描くには、

```
<<Graphics`ParametricPlot3D`
CylindricalPlot3D[z,{r,r0,r1},{t,t0,t1}]
```

次の曲面を描くこと。

z = 2t　(螺旋スロープ)

```
CylindricalPlot3D[2t,{r,0,6},{t,0,2Pi}]
```

z = 1 + cos r cos t

```
CylindricalPlot3D[1+Cos[r] Cos[t], {r,0,2Pi},{t,0,2Pi}, PlotPoints->40,
     BoxRatios->{1,1,1}, Boxed->False, Axes->False, ViewPoint->{1,2,4}]
```

【回転面】

次の２次曲面を描くこと。ｚ軸を回転軸とする。

回転放物面　$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

一葉回転双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

二葉回転双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

次の曲線とｘ軸の間の図形をｘ軸の周りに１回転して得る回転面を描け。

$y=\sin x \quad (0 \le x \le \pi)$

カーヂオイド　$r=1+\cos\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

サイクロイド　$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

いろいろな外サイクロイドや内サイクロイド（面白い図形を発見すること）

いろいろな外トロコイドや内トロコイド（面白い図形を発見すること）

直交座標では SurfaceOfRevolution があるので、媒介変数や極座標の関数は直交座標に変換する。

カーヂオイドを直交座標で表すと $y=\pm\dfrac{\sqrt{1+2x-2x^2\pm\sqrt{1+4x}}}{\sqrt{2}}$ である。

そこで４つの枝をそれぞれ描くこと。また、サイクロイドではｙを独立変数として、$x=\cos^{-1}(1-y)-\sin(\cos^{-1}(1-y))$ だから $0 \le y \le 2$ の範囲でその関数グラフをｘ軸の周りに１回転させる。

媒介変数表示のとき、曲線 $(f(t),g(t))$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 上の点をｘ軸の回りに角 θ だけ回転した点は $(f(t), f(t)\cos\theta, g(t)\sin\theta)$ であるから、回転面は ParametricPlot3D で描ける。

懸垂面･カテノイド　catenoid

懸垂線　$z=a\cosh\dfrac{x}{a}$　をz軸の周りに1回転した曲面

回転面としては唯一の極小曲面

【その他の曲面】

メービウスの帯

```
<<Graphics`SHapes`
Show[Graphics3D[MoebiusStrip[2,0.8,50]]]
```

クラインの壷

ウルフラムの本に絵があるが、関数グラフではなさそう…

実際、クラインの壷は３次元空間には存在しないから。

参考書

D

小林道正　Mathematicaによる関数グラフィックス　森北出版　１９９７