

E2 特殊関数

【ガンマ関数】

$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ (ガンマ関数) について

$s = 1.0, 1.1, 1.2, \dots, 2.0$ に対するガンマ関数表を作成すること。

$$\Gamma(1.1) = 0.95135, \quad \Gamma(1.5) = 0.88623 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

漸化式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を用いて、 $s = 1.0, 1.1, \dots, 4.9, 5.0$ に対するガンマ関数表に拡張すること。

```
For[s=1., s<=2., s=s+0.1, Print[s, " ", Gamma[s]/N]]
```

ガンマ関数のグラフを描くこと。

```
Plot[Gamma[s], {s, 0, 6}]
```

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{を確認すること。}$$

【ベータ関数】

$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ (ベータ関数) について

p, q をそれぞれ 1.0 から 2.0 まで 0.1 きざみで変えながら $B(p, q)$ の値を計算する。

ベータ関数の曲面を描くこと。

```
Plot3D[Beta[p,q], {p, 0.001, 5}, {q, 0.001, 5}, PlotPoints->30]
```

次の各々を確認すること。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p u \cos^q u du = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^n}} dx = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{特に } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \approx 1.40218,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \approx 1.31103$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{いろいろな } p, q \text{ で})$$

【楕円積分】

根号内が 1 次または 2 次の無理関数の積分は、適当な置換により有理関数の積分に帰着

できることはよく知られている。根号内が 3 次または 4 次の無理関数の積分は、 $R(x, y)$ が x, y の有理関数のとき、

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx \quad \text{や} \quad \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx$$

の形から一連の変換により、次の第 1 種、第 2 種および第 3 種の楕円積分に帰着される。ここで $0 < k < 1$ である。

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad \int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$$

$$\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

ここで、 $t = \sin \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) とおくと、次のルジャンドル(Legendre)の形になる。

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

これらに対応する定積分（積分の下端は 0）は次の記号で表されている。

$$\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m \sin^2 \theta}} = \text{EllipticF}[\varphi, m] \quad (\text{第 1 種楕円積分})$$

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-m \sin^2 \theta} d\theta = \text{EllipticE}[\varphi, m] \quad (\text{第 2 種楕円積分})$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-n \sin^2 \theta)\sqrt{1-m \sin^2 \theta}} = \text{EllipticPi}[n, \varphi, m] \quad (\text{第 3 種楕円積分})$$

これらを不完全楕円積分といい、とくに $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のとき、完全楕円積分という。

完全楕円積分 $\text{EllipticF}[\frac{\pi}{2}, m]$ は $\text{EllipticK}[m]$ でもよい。同じく

$$\text{EllipticE}[\frac{\pi}{2}, m] = \text{EllipticE}[m], \quad \text{EllipticPi}[n, \frac{\pi}{2}, m] = \text{EllipticPi}[n, m]$$

例 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) の全長 L を求める。 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ において

$$\begin{aligned}
L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta} d\theta \quad \text{ここで } \theta = \frac{\pi}{2} - \mu \text{ とおくと} \\
&= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu} d\mu \quad \text{ただし } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}
\end{aligned}$$

楕円は2定点からの距離の和が一定であるような点の軌跡

例 連珠形(レムニスケート) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ の全長 L を求める。

$$\begin{aligned}
L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad \text{ここで } \sqrt{2} \sin \theta = \sin \mu \text{ とおく} \\
&= 2\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \mu}}
\end{aligned}$$

2 定点からの距離の積が一定であるような点の軌跡はカッシーニ二曲線(卵形)である。

$F(a, 0), F'(-a, 0), P(x, y)$ とし $FP \cdot PF' = c^2$ とすると

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = c^4 - a^4$$

となる。テニスのラケットの形で利用されている。特に、 $a = c$ のとき

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad \text{であり、極座標にすると } r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

であり $\sqrt{2}a$ を改めて a とおくと $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ となる。

【楕円関数】

ヤコビは楕円積分の逆関数を考えた。第1種楕円積分

$$\text{EllipticF}[\varphi, m] = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

の値域は $K = \text{EllipticK}[m]$ とおいて $[-K, K]$ である。そこで、その逆関数を

$$\phi = \text{am}(u|m)$$

とおき、ヤコビ振幅関数という。JacobiAmplitude[u,m] として使うことができる。

ヤコビの楕円関数 JacobiSN[u, m], JacobiCN[u, m] および JacobiDN[u, m] は

$$\text{sn}(u) = \sin(\phi), \quad \text{cn}(u) = \cos(\phi), \quad \text{dn}(u) = \sqrt{1 - m \sin^2 \phi}$$

で定義される。ここで $\phi = \text{am}(u|m)$ とし、sn (I x I x)、cn (x-I x)、dn (x-I x) 関数いう。

これは $\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ の逆関数が $x = \sin \theta$ であるのと似ている。

ここでは楕円積分の場合のように、k は母数という。

定義域	値域	微分 と 積分
$x = \text{sn}(u) \quad -K \leq u \leq K$	$-1 \leq x \leq 1$	$\frac{dx}{du} = \text{cn}(u)\text{dn}(u)$
$x = \text{cn}(u) \quad -K \leq u \leq K$	$0 \leq x \leq 1$	$\frac{d}{du} \text{cn}(u) = -\text{sn}(u)\text{dn}(u)$
$x = \text{dn}(u) \quad -K \leq u \leq K$	$0 \leq x \leq 1$	$\frac{d}{du} \text{dn}(u) = -m \text{sn}(u)\text{cn}(u)$
$\int \text{sn}(u) du = \frac{1}{\sqrt{m}} \log(-\sqrt{m} \text{cn}(u) + \text{dn}(u)) \quad \int \text{cn}(u) du = \frac{\text{sn}(u) \cos^{-1}(\text{dn}(u))}{\sqrt{1 - \text{dn}(u)^2}}$		
$\int \text{dn}(u) du = \text{am}(u m)$		ただし、 $K = K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k)$

楕円関数は定義域を複素数まで拡張できる。複素変数の楕円関数の重要な性質は二重周期性である。すなわち、任意の整数 r, s について

$$f(z + r \omega + s \omega') = f(z)$$

が成り立つ。この様子を楕円関数 JacobiSN[u, m] の u を $u_x + I u_y$ と複素変数に

置き換え、適当な定義域での、JacobiSN[ux + I uy, m] の絶対値を描く等高線を描くことで示す。

```
m = 1/3; K=EllipticK[m];
ContourPlot[Abs[JacobiSN[ux + I uy, m]], {ux,0, 4K}, {uy,0 4K}]
```

ContourPlot を Plot3D に置き換えたり、JacobiSN を JacobiCN や JacobiDN に置き換えてみよ。また、Option として PlotPoints->40 や Mesh->False を付けてみよ。

(複素変数の) 楕円関数論の入門をしないで JacobiSN[ux + I uy, m] を理解する早道は、JacobiSN[u,m] のマクローリン展開 (n = 5 程度) で、u を ux + I uy と置き換え、この関数の実部と虚部を考え、上の操作をやり直すとよいだろう。

その他の楕円関数として、ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数(pe function)とその

逆関数がある。まず、 $\wp$ 関数は、楕円積分 $u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$ の逆関数であり、

WeierstrassP[u, {g₂, g₃}] が、u に対する z を与える。

InverseWeierstrassP[z, {g₂, g₃}] はその逆関数である。

パラメータ {g₂, g₃} を適当に定めて、この計算を JacobiSN のように行ってみよ。

参考書

特殊関数 小松勇作 朝倉書店 近代数学講座 9

数学辞典 (第3版) 岩波書店 p.721 楕円関数

Mathematica ブック (第3版) 日本語版

p.753 楕円関数 p.755 楕円関数