

E4 ベクトル解析

事前に、<<Calculus`VectorAnalysis`>としパッケージを読みこんでおく。

【ベクトルの表示】

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ を矢印を付けたベクトルとして表示せよ。

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を立体矢印を付けたベクトルとして表示せよ。

ベクトル (4, 3) を表示させるプログラム例

```
ten = {PointSize[0.01], Point[{4, 3}]};
sen = Line[{0, 0}, {4, 3}];
ya = Polygon[{4, 3}, {3.4, 2.8}, {3.7, (3.7*3)/4}, {3.75, 2.55}, {4, 3}];
t1 = Text[FontForm["P", {"Courier", 18}], {4.3, 3.3}];
t2 = Text[FontForm["0", {"Courier", 18}], {-0.3, -0.3}];
Show[Graphics[{ten, sen, ya, t1, t2}, Axes -> True, GridLines -> Automatic,
PlotRange -> {{-2, 6}, {-2, 6}}, AspectRatio -> Automatic]]
```

【内積・外積】

Mathematica でベクトル $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ と $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ の内積は $a.b$ である。
外積は $\text{Cross}[a, b]$ とする。

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ のとき

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

外積 $\vec{a} \times \vec{b}$

を求めよ。また

スカラー 3 重積 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

ベクトル 3 重積 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

を求めよ。

ベクトル a, b, c について、次を証明せよ。

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$$

【ベクトルの微分】

ベクトル $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ の微分 $d\vec{A}$ は

$d\vec{A} = dA_x \vec{i} + dA_y \vec{j} + dA_z \vec{k}$ で定義される。

$\vec{A} = \vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ のとき、 $\frac{d}{dt}\vec{A}(t)$, $\frac{d^n}{dt^n}\vec{A}(t)$ を求めよ。

$r = (\cos t, \sin t, \frac{t}{4})$ のときの速度ベクトル、加速度ベクトルを求めよ。

$a = (3t^2, t, -t^3)$, $b = (t, -2t^3, t^4)$ のとき、 $(a \cdot b)'$, $(a \times b)'$ を求めよ。

【ベクトルの積分】

2つのベクトル $\vec{A} = \vec{A}(t)$, $\vec{B} = \vec{B}(t)$ が t の関数で $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{B}$ のとき、

$\vec{A}$ の不定積分は $\int \vec{A} dt = \vec{B} + \vec{C}$ ($\vec{C}$ は定ベクトル) である。

$\vec{A} = \vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ の $[t_0, t_1]$ における定積分は

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(t) dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} A_x(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_{t_0}^{t_1} A_y(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_{t_0}^{t_1} A_z(t) dt \right) \vec{k}$ である。

$a = (3t^2, t, 1 - 4t^3)$ について、次の積分を求めよ。

$$\int a dt \quad \int_1^2 a dt \quad \int a \times a' dt$$

【スカラーの勾配 grad】

スカラー関数 $j = j(x, y, z)$ に対して $\nabla j = \frac{\partial j}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial j}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial j}{\partial z} \vec{k}$

Mathematica では、 $f[x, y, z]$ に対して $\text{Grad}[f, \text{Cartesian}[x, y, z]]$ で得られる。

$p = (x, y, z)$ と スカラー関数 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ について次を示せ。

$$\nabla r = \frac{p}{r}, \quad \nabla r^n = n r^{n-2} p, \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{p}{r^3}$$

【スカラーのラプラシアン】

スカラー関数 $j = j(x, y, z)$ に対して $\Delta j = \nabla^2 j = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2}$

Mathematica では、 $f[x, y, z]$ に対して $\text{Laplacian}[f, \text{Cartesian}[x, y, z]]$ で得られる。

$j = x^3 y z - 2 y^2 z^3 + 4 x y^2$ のとき Δj を求めよ。

【ベクトルの発散 div】

ベクトル関数 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ に対して

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

形式的には、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ とみなして $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$ である。

Mathematica では、 $g = \{g1[x, y, z], g2[x, y, z], g3[x, y, z]\}$ に対して $\operatorname{Div}[g, \text{Cartesian}[x, y, z]]$ とする。

$\vec{A} = y\vec{i} + 2xz\vec{j} + ze^x\vec{k}$ のとき、 $\operatorname{div} \vec{A}$ を求めよ。

【ベクトルの回転 rot あるいは curl】

ベクトル関数 $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ に対して

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

形式的には、 $\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$

$$= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k})$$

$$\text{あるいは} \quad = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

Mathematica では、 $g = \{g1[x, y, z], g2[x, y, z], g3[x, y, z]\}$ に対して $\operatorname{Curl}[g, \text{Cartesian}[x, y, z]]$ とする。

$a = (x^3y, z^5, xy^3z^4)$ のとき $\operatorname{rot} a$ を求めよ。

任意の微分可能なベクトル場 a, b と任意の微分可能なスカラー場 φ, ψ について次を証明せよ。

- (1) $\nabla \times (a + b) = \nabla \times a + \nabla \times b$
- (2) $\nabla(a \cdot b) = (a \cdot \nabla)b + (b \cdot \nabla)a + a \times (\nabla \times b) + b \times (\nabla \times a)$
- (3) $\nabla \cdot (a \times b) = b \cdot (\nabla \times a) - a \cdot (\nabla \times b)$
- (4) $\nabla \times (a \times b) = (b \cdot \nabla)a - (a \cdot \nabla)b + a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a)$
- (5) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 \cdot a$
- (6) $\nabla \times (fa) = \nabla f \times a + f(\nabla \times a)$
- (7) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- (8) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

$$(10) \quad \text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$(11) \quad \text{div}(\text{rot } a) = \nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$$

【接ベクトル・法ベクトル・弧長】

平面曲線あるいは空間曲線 $C = \{p(t) \mid t \in [a, b]\}$ が

$$p(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{あるいは} \quad p(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

と表わされているとする。接ベクトル (速度ベクトル) は

$$p'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{あるいは}$$

である。 $p'(t_0) \neq 0$ のとき、曲線 C は $p(t_0)$ で正則であるという。

平面曲線の場合は、曲線 C が $p(t_0)$ で正則のとき、 $p(t_0)$ において接線に垂直な直線 (法線) が存在し、法線方向のベクトルを法ベクトルという。

空間曲線の場合は、曲線 C が $p(t_0)$ で正則のとき、 $p(t_0)$ において接線に垂直な平面 (法平面) が存在する。

曲線 $C = \{p(t) \mid t \in [a, b]\}$ の長さは、

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad \text{あるいは}$$

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

である。 $p'(t) = (x'(t), y'(t))$ より、

$$|p'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{あるいは} \quad |p'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

を用いると、弧長 $L(C) = \int_a^b |p'(t)| dt$ を得る。

曲線 $C = \{p(t)\}$ において、 t のある値、例えば 0 から、 t までの弧長を $s(t)$ とする：

$$s(t) = \int_0^t |p'(t)| dt$$

これを弧長関数という。 $s = s(t)$ の逆関数 $t = t(s)$ を考えることによって曲線 C が $p(t) = p(t(s))$ のように、弧長 s をパラメータとして採用できる。ここで、 $|p'(s)| = 1$ が成り立つ。

【曲率・フルネの公式 平面曲線の場合】

弧長をパラメータとする曲線 $C = \{p(s)\}$ を考える。

$$e_1(s) = p'(s)$$

とおく。 $e_1 \cdot e_1 = 1$ だから、 s で微分すると

$$\frac{de_1}{ds} \cdot e_1 = 0 \quad \dots (1)$$

となる。これは $\frac{de_1}{ds}$ が e_1 に垂直または 0 であることを意味する。そこで

e_1, e_2 が右手系の正規直交系になるように e_2 をとる。従って

$$e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = 1 \quad \dots (2)$$

がなりたつ。(1) から

$$\frac{de_1(s)}{ds} = k(s)e_2(s)$$

となる。 $k(s)$ は曲線 C 上の関数で、 C の曲率という。 e_2 は C の単位法線

ベクトルという。(2) から

$$\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 + e_1 \cdot \frac{de_2}{ds} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\frac{de_2}{ds} \cdot e_2 = 0$$

となるので、 $\frac{de_2}{ds}$ は e_2 に直交し、

$$\frac{de_2}{ds} = le_1$$

と書けるが、(3) より $k + l = 0$ となり、 $l = -k$ 即ち

$$\frac{de_2}{ds} = -ke_1$$

である。まとめると次のフルネの公式を得る。

$$\begin{cases} e_1' = 0e_1 + ke_2 \\ e_2' = -ke_1 + 0e_2 \end{cases}$$

【フルネ標構 空間曲線の場合】

弧長をパラメータとする曲線 $C = \{p(s)\}$ を考える。

$$e_1(s) = p'(s)$$

とおく。 $e_1 \cdot e_1 = 1$ だから、 s で微分すると

$$2e_1'(s) \cdot e_1(s) = 0$$

より、 $e_1'(s)$ は $e_1(s)$ と直交する。 $e_1'(s)$ の長さを $k(s)$ とする：

$$k(s) = \sqrt{e_1'(s) \cdot e_1'(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

空間曲線では $e_1(s)$ に直交する単位ベクトルは無数にあるので、平面曲線のように $e_2(s)$ を定めるわけにいかない。そこで $k(s) \neq 0$ のとき、

$$e_1'(s) = k(s)e_2(s)$$

によって $e_1(s)$ に直交する単位ベクトル $e_2(s)$ を定義する。 $e_2(s)$ を主法線ベクトルという。以下 $k(s) \neq 0$ とする。 $e_1(s)$ に直交するもう 1 つの単位ベクトル $e_3(s)$ を外積を用いて

$$e_3(s) = e_1(s) \times e_2(s)$$

で定めて、従法線ベクトルという。 $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ をフルネ標構という。

さて、 $e_1' = ke_2$ から $e_1' \cdot e_2 = k$ である。

また $e_1 \cdot e_2 = 0$ を微分すると

$$0 = e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = k + e_1 \cdot e_2'$$

$e_2 \cdot e_2 = 1$ を微分すると

$$e_2 \cdot e_2' = 0$$

である。 e_2' は e_2 と直交することから e_1, e_3 の一次結合である。

そこで $e_2' = ae_1 + te_3$ とおく。 $e_1 \cdot e_2' = -k$ から $a = -k$ と分かる。よって

$$e_2' = -ke_1 + te_3$$

を得る。次に、 $e_3 \cdot e_3 = 1$ から $e_3' \cdot e_3 = 0$ なので e_3' は e_3 と直交することから

e_1, e_2 の一次結合である。 $e_3' = ae_1 + be_2$ とおく。 $e_1 \cdot e_3 = 0$ から

$0 = e_1' \cdot e_3 + e_1 \cdot e_3' = ke_2 \cdot e_3 + e_1 \cdot e_3' = e_1 \cdot e_3'$ なので、 $a = 0$ である。また

$e_2 \cdot e_3 = 0$ から $0 = e_2' \cdot e_3 + e_2 \cdot e_3' = (-ke_1 + te_2) \cdot e_3 + e_2 \cdot e_3' = t + e_2 \cdot e_3'$ なので

$b = -t$ となる。以上をまとめて、フルネ・セレーの公式

$$\begin{cases} e_1' = ke_2 \\ e_2' = -ke_1 + te_3 \\ e_3' = -te_2 \end{cases}$$

を得る。 κ は曲率、 τ はれい率またはねじりという。

つる巻き線 $p(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ において、弧長パラメータ s を用いて $p(s)$ を求め、フルネ標構 $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ と曲率・れい率を求めよ。

次の各曲線のねじりを計算し、ねじりが最大となる t の値・最小となる t の値を求めよ。

(1) $x = t^2, y = t, z = t + 1$

(2) $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{t}$

(3) $x = e^t, y = \cos t, z = t$

【線積分・面積分】

2点 P_0, P_1 を結ぶ曲線 C に沿って、ベクトル A の接線成分 A_t に曲線素 ds をかけて P_0 から P_1 までの積分 $\int_C A_t ds$ を C に沿った A の (線素に関する) 線積分 という。

曲面 S で定義されたベクトル関数 A において、曲面 S の単位法線ベクトルを n とするとき、 $\int_S A \cdot ndS$ を A の (曲面 S に関する) 面積分 という。

【ガウス・グリーン・ストークスの定理】

ガウスの発散定理は、面積分を体積分に、あるいは体積分を面積分に変える公式であり、ストークスの定理は、面積分を線積分に、あるいは線積分を面積分に変える公式である。

$V(x, y, z)$ を 3 次元空間のある領域で定義された関数とし、その領域に含まれる閉曲面 S の上およびその内部 V で連続で微分可能とすれば、

$$\iint_S V \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} V dv$$

すなわち、

$$\iint (V_1 dydz + V_2 dzdx + V_3 dxdy) = \iiint_V \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) dxdydz$$

(ガウスの発散定理)

$f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ を考える領域で連続で微分可能なスカラー関数、 S はその領域内の閉曲面、 V をその囲む領域とすると

$$\iiint_V n \cdot (f \nabla g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS$$

(グリーンの定理)

$V(x, y, z)$ を 3 次元空間のある領域で定義された関数とし、その領域に含まれる閉曲面 S の上 (周も含めて) で連続で微分可能とすれば、

$$\iint_S \operatorname{rot} V \cdot dS = \int_{\partial S} V \cdot dr$$

すなわち

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dxdy \right) = \int_{\partial S} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz)$$

(ストークスの定理)

ガウスの発散定理を、 V が 5 平面 $x=0$, $x=2$, $y=0$, $z=0$, $y+z=1$ で囲まれた三角プリズムとし、 $V = (x^2 z, 3y(z+1), z^2)$ の場合で確かめよ。

ストークスの定理を、 S が回転放物面 $z=1-x^2-y^2$ の $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の部分とし、 $V = (0, 0, yz)$ の場合で、両辺とも $4/15$ となることで、確認すること。

参考書

小畠守生 微分幾何 放送大学教育振興会

宇田川 精解演習ベクトル解析 広川書店

田沢義彦 Mathematica による工科の数学 東京電機大学出版局

茂木勇・横手一郎 基礎微分積分 裳華房

John S. Robertson, 下地貞夫他訳 Mathematica による工科系数学 共立出版

小林道正 Mathematica による線形代数 朝倉書店