

E5 微分方程式

【歴史的なことがら】

17世紀後半に、イギリスのニュートン(1642-1727)とドイツのライプニッツ(1646-1716)がそれぞれ独立に微分積分法を発見したと言われている。その後、ニュートンの流率法による計算法は長続きせず、ライプニッツの記号化された演算子法がヨーロッパ大陸で受け継がれ、それまでに解かれなかった問題が種々解かれるようになり、また新しい問題が主として微分方程式の形で生まれるようになった。つまり、微分方程式は微積分学と同時に始まったのである。

当時考えられていた問題と微分方程式の例

(ハイラー、ワナー『解析教程(上・下)』(蟹江幸博訳)シュプリンガー・フェアラーク東京(1997))

(1) 等速降下曲線 (ライプニッツが1687年に提案した問題)

《物体がある曲線 $y(x)$ に沿って滑り落ちていくとき、その鉛直方向の速度 $\frac{dy}{dt}$ がどこでも、与えられた定数 $-b$ に等しいような曲線を求めよ。》

1690年ヤコブ・ベルヌーイ $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{-1-2g\frac{y}{b^2}}}$ を解く。

(2) トラクトリックス (クロード・ペローが1672-76に提案した問題)

《どんな曲線に対して、各点 P での接線の P と x 軸との間が一定の長さ a になるか》

1693年ライプニッツ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ を解く。

(3) カテナリー (1691年)

ガリレイは2つの爪から釣り下げられた鎖は放物線になっていると主張した(1638)。20年ほど後、当時16歳だったオランダのホイヘンスはこの結果が誤っているに違いないことを発見した。しばらくは解決されなかった。

1691年ヨハン・ベルヌーイ $c dp = \sqrt{1+p^2} dx$ を解く。

(4) 最速降下線 (ヨハン・ベルヌーイが1696年に提案した問題)

《垂直な平面に2点 A , B が与えられたとき、粒子 M で A を出発して、自重だけの影響下で下降し、最短時間で B に到達するような道 AMB を決定せよ》

ヨハン・ベルヌーイ $dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy$ を解く。

微分方程式で表される現象の例

力学関係

物体の落下運動

固定した点からバネで吊り下げられた物体の運動

電気関係（RL回路）

インダクタンスLと電圧Vの直列回路が閉じられているときの電流I

上の回路にコンデンサーを加えた回路で、コンデンサーに蓄えられた電気量

自然現象

ニュートンの冷却の法則

放射性物質の崩壊

トリチェリの法則

生物・経済関係

マルサスの法則

ロジスティック方程式

【解法の歴史】

常微分方程式 ニュートン、ライプニッツの後、18世紀前半にはベルヌーイ家の数学者ら、クレロー、リッカチ、オイラー、ラグランジュらが、特殊な型を個々の方法で解き、有限回の積分で解を表すこと（求積法）に重点をおいた。18世紀後半、ラグランジュが線形の解を求めるために定数変化法を考案した（1775）。またフロベニウス（1873）らは常微分方程式の因数分解を形式的に取り扱った。その他、常微分方程式の解法として、級数による解法、ラプラス変換、フーリエ変換などを利用するもの、数値解法など、種々の解法が考案されてきた。

偏微分方程式 ダランベール（1744）およびオイラーが流体力学に関する物理的問題の取り扱いにおいて始めて研究した。物理的な問題との関連から、2階線形方程式が18世紀以来その研究の主流となった。

例 次の微分方程式を解くこと。

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = A, y'(0) = B$$

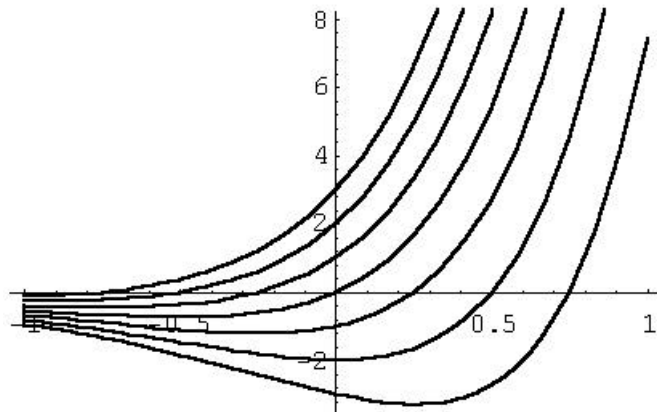
Mathematica による解答例

```
DSolve[{x'[t]-2 x[t]==4E^(2 t)},x[t],t]
```

一般解 $\{\{x[t] \rightarrow 4E^{2t}t + E^{2t}C[1]\}\}$

```
DSolve[{x'[t]-2 x[t]==4E^(2 t),x[0]==1},x[t],t]
{{x[t]-> E^(2t) + 4E^(2t)t}}
DSolve[{x''[t]+x[t]==0,x[0]==A,x'[0]==B},x[t],t]
{{x[t]-> ACos[t]+ B Sin[t]}}
```

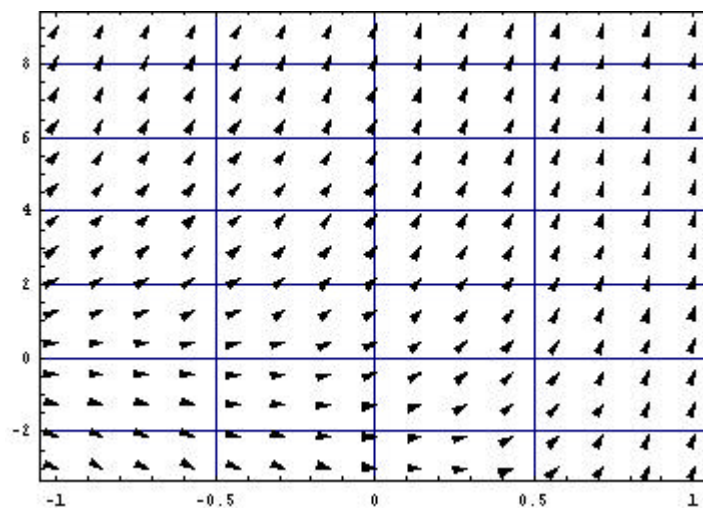
```
Plot[Evaluate[Table[(4 t + k) E^(2t),{k,-3,3}]],{t,-1,1}]
```



点 (t, x) における接線方向のベクトル $(1, x'[t])$ のベクトル場を描くには、

```
<<Graphics`PlotField`
```

```
PlotVectorField[{1, 2 x+4E^(2 t)},{t,-1,1},{x,-3,9},GridLines->Automatic,
  AspectRatio->0.7, Frame->True]
```



【任意定数の消去】 任意定数を消去して微分方程式をつくれ。

$$y = cx - x^2$$

$$y = \frac{e^{cx}}{x^2}$$

$$y = c_1 x - \frac{c_2}{x^2}$$

$$y = (c_1 \sin x + c_2 \cos x)e^x$$

【変数分離形】 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)$ の形 次の微分方程式を解け。

$$y' = \frac{y-1}{x}$$

$$y' = \frac{y}{2x}$$

$$y' = 8x^3 y^2$$

【同次形】 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ の形 次の微分方程式を解け。

$$(x+y) + (x-y)y' = 0 \quad y' = \frac{x+2y}{x}$$

$$y' = (x-y)^2 \quad xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$$

【完全形・積分因子】 $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$ の形

このとき、左辺が df だから、一般解は $f(x, y) = c$ である。

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{が完全形} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全形でなくても $m(x, y)$ を掛けた

$$m(x, y)P(x, y)dx + m(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad \text{が完全形}$$

になるとき $m(x, y)$ を積分因子という。積分因子を求める一般的な方法はない。

次の全微分方程式を解け。

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0 \quad (x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

$$2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0 \quad (y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$$

$$2ydx + xdy = 0 \quad (x^2 + y)dx - xdy = 0$$

【1階線形】 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ の形

$$y' + y = x$$

$$y' + 2y = e^x$$

$$y' + \frac{y}{x} = 1$$

$$y' + x^2 y = x$$

【ベルヌーイ】 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ の形

$$y' - y = xy^2 \qquad xy' = y + y^2 \log x \ (x > 0)$$

$$3xy' + y + x^2 y^4 = 0$$

【リッカチ】 $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ の形

DSolve では解けない。もし、特殊解 $u(x)$ が見つければ、 $y = u + \frac{1}{z}$ の変換により

リッカチの方程式を線形方程式にすることができる。

$$y' = y^2 + (1 - 2x)y + (x^2 - x + 1) \quad (u(x) = x \text{ は特殊解である})$$

【ラグランジュまたはダランベール】 $y = x f\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ の形

$$y = x(1 + y') + (y')^2$$

【クレロー】 $y = x \frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$ の形 (ラグランジュの特別な場合)

$$y = (x + 1)y' - (y')^2$$

【同次定数係数2階線形】 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ の形

$$y'' - y' - 6y = 0$$

$$y'' - 12y' + 36y = 0$$

$$y'' + 8y' + 25y = 0$$

【同次定数係数高階線形】 $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$ の形

$$\frac{d^5 y}{dx^5} - 12 \frac{d^4 y}{dx^4} + 74 \frac{d^3 y}{dx^3} - 272 \frac{d^2 y}{dx^2} + 585 \frac{dy}{dx} - 676 y = 0$$

$$y'''' - 4y''' - 5y'' + 36y' - 36y = 0$$

【非同次定数係数2階線形】 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = r(x)$ の形

$$y'' - y' - 6y = x^2$$

$$y'' - 12y' + 36y = \sin x$$

$$y'' - y' - 6y = \cos x$$

$$y'' - 2y' + 7y = 3 \sin 2x$$

$$y'' - y' - 6y = x^2 + \cos x$$

【同次2階線形】 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$ の形

$$y'' - \frac{3y'}{2x} - \frac{3y}{2x^2} = 0 \qquad y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = 0$$

$$y'' - \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0$$

【非同次2階線形】 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$ の形

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = x \qquad y'' - \frac{2}{x} y' - \frac{2y}{x^2} = x$$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 1$$

【ベッセル】 (*) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - l^2)y = 0 \ (l \geq 0)$

(**) $x^2 y'' + xy' - (x^2 + l^2)y = 0 \ (l \geq 0)$

Bessel は1824年、惑星運動に関する Koepler 方程式を解くために(*) の解をべき級数として解き、その解である Bessel 関数を組織的に研究した。後に、Bessel 関数は電子工学・電磁理論・量子力学など応用上重要な位置を占めるに至った。

$$J_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \qquad \text{第1種ベッセル関数} \quad \text{BesselJ}[\lambda, x]$$

$$Y_n(x) = J_n(x) \cot(np) - J_{-n}(x) \operatorname{cosec}(np) \qquad \text{第2種ベッセル関数} \quad \text{BesselY}[\lambda, x]$$

$$I_l(x) = i^{-l} J_l(ix) \qquad \text{修正ベッセル関数} \quad \text{BesselI}[\lambda, x]$$

$$K_l(x) = \frac{p}{2} i^{l+1} (J_l(ix) + i Y_l(ix)) \qquad \text{修正ベッセル関数} \quad \text{BesselK}[\lambda, x]$$

とおく。ただし、 i は虚数単位とする。

λ が0以上の整数のとき $J_l(x)$ は(*)の特殊解である。

λ が整数でないとき、 $J_l(x), J_{-l}(x)$ が(*)の基本解である。

λ が正整数のとき $J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x)$ である。

λ が整数でないとき、 $Y_l(x), Y_{-l}(x)$ も(*)の一組の基本解である。

λ が整数 n のとき $Y_n(x) = \lim_{l \rightarrow n} Y_l(x)$ と定めると、 $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$ であり、

このとき $J_n(x), Y_n(x)$ が(*)の基本解となる。

$I_l(x), K_l(x)$ は(**)の一組の基本解である。

関数 $J_0(x), J_1(x)$ のグラフを同一座標系に $0 \leq x \leq 15$ の範囲で描け。

関数 $Y_0(x), Y_1(x)$ のグラフを同一座標系に $0 < x \leq 12$ の範囲で描け。

【エアリ A i r y Ai(x), Bi(x)] $y'' = (x - l)y$

$$y''' = xy$$

$$\text{AiryAi}[x] \quad \text{AiryBi}[x]$$

【コーシー・オイラー】 $x^2 y'' + bxy' + cy = 0$

$$x^2 y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(10) = 2$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(5) = -1$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = \frac{x^2}{2} \quad (\text{手計算のときは } x = e^t \text{ と変換する})$$

【連立】 次の連立微分方程式を解け。

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 + 5\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ y_2' = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2, \quad y_2(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + \sin t, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 - \cos t, \quad y_2(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy_1' = ay_1 + by_2 \\ xy_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases} \quad \text{は } x = e^t \text{ と変換すると定数係数の連立微分方程式になる。}$$

【直交多項式系を解とする微分方程式（特殊関数）】

ルジャンドルの微分方程式 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{LegendreP}[n, x]$$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

エルミートの微分方程式 $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{HermiteH}[n, x]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

チェビシェフの微分方程式 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

$$(\text{第1種}) \quad T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \quad \text{ChebyshevT}[n, x]$$

$$T_n(\cos q) = \cos(nq), \quad T_n(1) = 1$$

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

$$(\text{第2種}) \quad U_n(\cos q) = \frac{\sin((n+1)q)}{\sin q} \quad \text{ChebyshevU}[n, x]$$

$$\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

ラゲールの微分方程式 $xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad \text{LaguerreL}[n, x] \quad (a=0 \text{ のとき})$$

$$\text{一般の場合は} \quad L_n^a(x) \quad \text{LaguerreL}[n, a, x]$$

$$\int_0^{\infty} L_m^a(x) L_n^a(x) x^a e^{-x} dx = 0 \quad (m \neq n)$$

【その他の微分方程式】

Van der Pol 微分方程式 $y'' + ey'(y^2 - 1) + y = 0$

これを、2つの微分方程式に書きなおし、初期条件と ε を与える：

$$y' = x \quad y(0) = 1/2, \quad x(0) = 0$$

$$x' = -y - e(y^2 - 1) \quad e = 0.1$$

ローレンツの微分方程式

$$x' = -3(x - y)$$

$$y' = -xz + 26.5x - y$$

$$z' = xy - z \quad x(0) = z(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

ダuffingの微分方程式

$$y'' + l^2 y + my^3 = 0$$

【偏微分方程式】

z が独立変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の未知関数で、 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の既知関数で

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y$$

のとき、1階線形という。特に $Y = 0$ のときは、同次であるという。

u が独立変数 x, y の未知関数で A, B, C, a, b, c, f は x, y の既知関数で

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

のとき、2階線形という。

$d = AC - B^2$ の符号によって、 $d < 0$ なら双曲型、 $d = 0$ なら放物型、 $d > 0$ なら楕円型と呼ばれる。

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad \text{のラプラシアンを} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad \text{とおく。}$$

また、 $Q(x, t) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ は既知関数とし、 ρ は既知の点関数とする。

有名な偏微分方程式の例として

$$\text{波動方程式 (双曲型)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = Q(x, t)$$

$$\text{熱伝導の方程式 (放物型)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = Q(x, t)$$

$$\text{ポテンシャル論の方程式 (楕円型)} \quad \Delta u = -4\pi\rho$$

$$\text{関数 } u = x^3 + 12xt^2 \text{ は一次元の波動方程式 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ の解}$$

関数 $u = e^{-t} \sin x$ は一次元の熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ において $a=1$ の時の解

関数 $u = \sin x \cosh y$ は二次元のラプラス方程式 $\Delta u = 0$ の解

関数 $u = \frac{y}{x}$ は二次元ポアソン方程式 $\Delta u = f(x, y)$ において $f(x, y) = \frac{2y}{x^3}$ のときの

解

参 考 書

剣持勝衛・水原昂廣 解析Ⅳ・微分方程式 共立出版

小林道正 Mathematica 微分方程式 朝倉書店 1998

John S. Robertson 下地貞夫他訳 Mathematica による工科系数学 共立出版

パソコンによる微分方程式 森本光生 朝倉書店 1987

基礎数学ハンドブック イ・エヌ・ブロンシュテイン他 宮本・松田訳 森北出版 1964

守田勝彦 工業数学演習 朝倉書店 1978