

E6 フーリエ級数・ラプラス変換

【直交関数系】

区間 $[a, b]$ において、積分可能な関数 $f(x), g(x)$ が $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ をみたすとき $f(x), g(x)$ は直交するという。左辺を簡単のため (f, g) と表す。

$f(x) \neq 0$ のとき、 $(f, f) > 0$ である。 $f_0(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{(f, f)}}$ とおくと、 $(f_0, f_0) = 1$ となる。

$f_0(x)$ は $f(x)$ の正規化関数という。

区間 $[a, b]$ において連続な関数列 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ が

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 1(m=n) \\ 0(m \neq n) \end{cases}$$

を満たすとき、正規直交系であるという。

例1 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ は区間 $[-\pi, \pi]$ において直交系である。これを正規化して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

は正規直交系となる。

例2 区間 $[-1, 1]$ におけるルジャンドルの多項式 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ は正規化されていない直交系である。ここで $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n (n = 0, 1, 2, \dots)$ は n 次多項式である。

Mathematica でこの多項式を得るには LegendreP[n, x] と入力する。

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} \quad \text{等となる。}$$

区間 $[a, b]$ における正規直交関数系 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ があるとき、もし

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

なる展開が可能で、項別積分が許されれば、

$$(f, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi_n, \varphi_k) = c_k$$

となる。 $c_n = (f, \varphi_n)$ において、 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ を $f(x)$ のフーリエ式展開という。

【フーリエ級数】

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ がある条件のもとで

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \quad (1)$$

ように三角級数に展開されるとし、級数の項別積分を仮定すると、係数 a_n, b_n は確定し

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \quad (2)$$

となる。今 $f(x)$ の積分可能性を仮定して、(2) によって定めた a_n, b_n を係数とする三角級数を作ることができる。これを $f(x)$ のフーリエ級数といい

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

のように書く。 a_n, b_n はフーリエ係数という。

$[a, b]$ を周期区間とする関数 $f(x)$ の $n = k$ までの項は、Mathematica では

<<Calculus`FourierTransform`

FourierTrigSeries[f[x], {x, a, b}, k]

により得られる。

例1 区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(x) = x$ のとき

$$a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$$

となり、

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \quad (-\pi < x < \pi)$$

特に $x = \frac{\pi}{2}$ とおくと

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \quad (\text{Gregory, Leibnitz})$$

例2 区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(x) = |x|$ のとき

$$a_0 = \pi, \quad a_n = \begin{cases} 0 & (n: \text{even}) \\ -\frac{4}{n^2\pi} & (n: \text{odd}) \end{cases}, \quad b_n = 0$$

となり、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

特に $x = 0$ とおくと

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

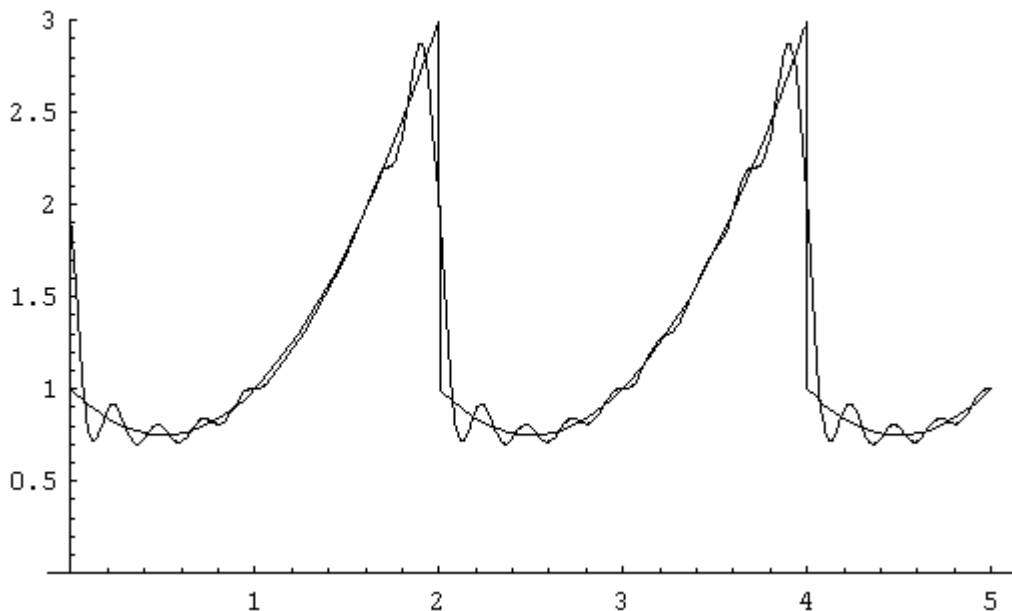
これから

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \text{ (Euler)}$$

例3 $f(x) = x^2 - x + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) を基本周期 $[0, 2]$ の周期関数とする。

$f(x)$ とその 8 次までのフーリエ級数を $[0, 5]$ の範囲で表示させる。

```
f[x_]:=x^2-x+1 /; 0<=x<=2
f[x_]:=f[x-2] /; x>2
f[x_]:=f[x+2] /; x<0
gr1=Plot[f[x],{x,0,5},PlotRange->{0,3},AspectRatio->Automatic]
f8=FourierTrigSeries[x^2-x+1,{x,0,2},8];
gr8=Plot[f8,{x,0,5},PlotRange->{0,3}]
Show[gr1, gr8]
```



周期 $2L$ の奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ここで} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

周期 $2L$ の偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ここで} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

関数 $f(x) = x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) のフーリエ余弦級数を求める。

関数 $f(x) = x^3$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) のフーリエ正弦級数を求める。

$$\text{関数 } f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1/3) \\ 1 & (1/3 \leq x \leq 2/3), \quad f(x+1) = f(x) \quad (\text{矩形波}) \text{ のグラフへ} \\ 0 & (2/3 < x < 1) \end{cases}$$

そのフーリエ級数を重ねて表示すること。

関数 $h(x) = (1-x)(x+1)(x-2)$, $(-1 \leq x \leq 1)$ の定義域を $h(x+2) = h(x)$ により全実数に拡張し、そのフーリエ級数の10項までの部分和を求めよ。両者のグラフを重ねて表示せよ。

ディラックのデルタ関数のフーリエ正弦・フーリエ余弦を計算せよ。周期は π とする。

【フーリエ変換】

関数 $f(t)$ に対するフーリエ(Fourier)変換

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos st - i \sin st) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt \end{aligned}$$

フーリエ変換と逆フーリエ変換を求める方法

<<Calculus`FourierTransform`

FourierTransform[f[t],t,s]

InverseFourierTransform[g[s],s,t]

次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & t & t^2 & \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2 + a^2} & & t^2 \sin t & & \end{array}$$

次の関数 $g(s)$ のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\begin{array}{ccccc} 1 & s & s^2 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{array}$$

【ラプラス変換】

関数 $f(t)$ に対するラプラス(Laplace)変換

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$f(t)$ を原関数、 $F(s)$ を像関数という。ラプラス逆変換は $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ と書く。

ラプラス変換とラプラス逆変換の表

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s} (s > 0)$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} (s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} (s > a)$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} (s > 0)$
t^n (n:pos.int)	$\frac{n!}{s^{n+1}} (s > 0)$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} (s > a)$
$t^n e^{at}$ (n:pos.int)	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} (s > a)$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} (s > a)$
t^α ($\alpha > -1$)	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} (s > 0)$		

ラプラス変換の基本法則

線形法則 $L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$

相似法則 $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

像関数の移動 $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

原関数の移動 $L\{f(t-a)u_a(t)\} = e^{-as}F(s) \quad (a \geq 0)$

ここで $u_a(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < a) \\ 1 & (a < t) \end{cases}$ (単位階段関数) とする。

$$L\{f(t+a)\} = e^{as}\{F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t) dt\} \quad (a \geq 0)$$

微分法則 $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

積分法則 $L\left\{\int_a^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(t) dt$

合成法則 $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ (Convolution) に対して

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

ラプラス変換と逆変換の計算のためパッケージ

<<Calculus`LaplaceTransform`

を読みこんでおく。これはディラックのデルタ関数でも必要。

$f(t) = e^{-2t} \sin 3t$ のとき $L\{f(t)\} = \frac{3}{9 + (2+s)^2}$ を得るには

LaplaceTransform[Exp[-2t] Sin[3t], t, s]

また、その逆は

InverseLaplaceTransform[3/(13+4s+s^2),s,t]

ディラックのデルタ関数は分布関数で、 $\delta(x) = 0 \ (x \neq 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ である。

次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = e^{at}$$

ゼロ次の第1種ベッセル関数 BesselJ[0,t]

ディラックのデルタ関数 DiracDelta[t-3]

$$f(t) = e^{-t} \frac{1 - \cos t}{t}$$

次の関数のラプラス逆変換を求めよ。また結果をプロットせよ。

ArcTan[1/s]

Exp[-s]/s

Exp[-2s]/(s+1)

$$F(s) = \frac{2e^{-3s}}{s^3(s^2+5)}$$

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解くこと。

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

$$y'' + 5y' + 5y = \delta(t-2) - 3\delta(t-5), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

参考書

Mathematica による工科系数学 John s. Robertson 下地他訳 共立出版 1996