９．微分積分と近似計算

極限操作は Excel では困難である。

前半の問題は Mathematica で処理する。関数は Mathematica の入力形式によること。

1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ を計算するには Limit[f[x],x->a] と入力する。

2) 次の関数を x で微分せよ。

$$(x+1)(x^2-2x+3) \qquad \log(x+\sqrt{x^2+A}) \qquad e^{-ax}\sin bx$$

関数 $f(x)$ を x で微分するには、D[f[x],x] と入力する。

3) 次の積分を求めよ。

$$\int\cos x dx \qquad \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} \qquad \int_0^{\frac{p}{2}}\cos^{10} x dx \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

不定積分 $\int f(x)dx$ は Integrate[f[x],x] で、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は Integrate[f[x],{x,a,b}] とする。

4) ニュートン法

方程式 $f(x)=0$ の解 $x=c$ の近似値として $x=x_0$ をとる。適当な条件の下で

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

なる漸化式で定まる数列 $\{x_n\}$ は c に収束することを用いて、次の方程式の近似値を求めよ。

$x^3=2$ $\qquad$ $\cos x = x$

解答例　1.25992,　 0.739085

5) シンプソンの公式

関数 $f(x)$ の a から b までの定積分 $S=\int_a^b f(x)dx$ を次のように近似計算する。

区間 $[a,b]$ を $2n$ 等分し、$h=\dfrac{b-a}{2n}$ とおく。分点を左から $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ とする（ただし $x_0=a,\ x_{2n}=b$ ）。 対応する関数値を $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ とおく。隣会う２個づつの小区間 $[x_{2k-2}, x_{2k}]\,(k=1,2,\ldots,n)$ において、３点

$$(x_{2k-2}, y_{2k-2}), \quad (x_{2k-1}, y_{2k-1}), \quad (x_{2k}, y_{2k})$$

を通る２次関数 $y=ax^2+bx+c$ で $f(x)$ を近似させる。このとき

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \qquad \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (ax^2 + bx + c)dx$$

$$= \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

である。ここで $k = 1,2,\ldots,n$ をわたらす総和として

$$\mathrm{S} = \int_a^b f(x)dx \qquad \frac{h}{3}[y_0 + 4\{y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\} + 2\{y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\} + y_{2n}]$$

という近似式が成り立つ。これを利用して次の定積分の近似値を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

解答例　p = 3.1416　　0.3413