

はじめに

ここ数十年の間、線形代数と微分積分は数理科学の基礎として、最も基本的なものであると、何の疑いもないほど自明なものとして受け取られてきた。近年、これらを含めて集合や論理および情報構造の基礎を定着させることの重要性も意識されてきた。これらは数理科学の目的ではなく次に続く学問のためのツールと捕らえるべきである。本書は数理科学を学ぶ学生が線形構造へ入門するためのテキストとして著わされた。

卒論を書き終えた学生たちと飲んでいたとき、ガウスの消去法というのがよく分からないという話を耳にした。こんな状態で学生が卒業しないよう、入門部分をしっかり固めようという目標をもった平成12年度からの新カリキュラムが発足した。本書では高校数学との接続をスムーズにするため、あえて重複をいとわず記述することにした。しかし、講義して気が付くことは、これほど基礎的な学問であるにもかかわらず、きちんと入門をさせるのは必ずしも容易ではないことである。

内容は従来の線形代数である。行列や行列式にはきれいな構造が沢山でくるので、**線形構造**というネーミングは悪くはない。線形構造入門に引き続き履修する線形構造基礎があるが、ここまでくれば線形構造がごく自然に感じられるであろう。

本書は、このテーマで開講した2回目の講義内容からなる。初年度の講義のときは、テキストが製本されておらず、不便であったが、講義中にいろいろ補足や修正を繰り返して本書が出来上がった。また、線形構造を学ぶにあたり、目標が見えてこないという受講生の声があったが、このような基礎的な分野を学ぶにも明確な展望が必要となれば、発展分野・応用分野を述べねばならない。

線形構造の応用されている分野

高校からの延長として、ベクトルを用いて平面や空間の図形をいろいろな方法で記述することができる。更に行列の理論を用いてより複雑な図形を標準化することができる。ベクトルや行列の概念はコンピュータの設計や表計算ソフトウェアの必須項目である。

線形構造は、数学的な構造として最も基本的なものであり、線形構造をもつ数学的な対象は膨大である。 R を実数全体とするとき、 n 次元のユークリッド空間 R^n は、代数的な側面を見ると、もっともポピュラーな線形空間である。実は、任意の有限次元ベクトル空間（線形空間）は適当な基底を選択し、線形写像を使えば、実質的に R^n と同一視できる。ある種の行列の集合が群や環といった代数系をなしている。従ってベクトルや行列を学ぶとき、代数学の抽象性の一端が随所に表れ、代数学入門の側面をもつ。必要に応じてスカラを R から複素数全体 C におきかえることも行われる。無限次元を扱うこともあり、 C^∞ といった構造が解析学や幾何学で登場する。経済・経営では、線形構造が線形計画法の中で広く使われている。もちろん理工学の多くの分野で必須のツールである。コンピュータの利用技術としての符号理論では、有限体の上の線形代数が利用される。

線形代数の小歴史

線形代数は、幾何学や解析学に比べると歴史は浅い。その後の代数学への発展を見ると、現代数学のもつ抽象化が最も早く始まったといえる。ベクトル空間がどのように登場したか、文献からは明らかにできないが 1850 年には定式化されていた。線形代数の基礎を築いた数学者たちのプロフィールを年代順に追ってみよう。

行列式にはライプニッツと関孝和の 2 名の先駆者がいたが、現代に続く線形構造はクラームルの著書から始まったといえる。

ライプニッツ Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1646~1716) (ドイツ) 微積分の発明で有名であるが、連立一次方程式の解法から行列式を思いつき 1693 年にロピタルへの手紙にそれを書いた。直ちに印刷されなかったため、歴史に埋もれた。

関孝和 Seki Takakazu (1642?~1708) (群馬県) 微積分の考えに達し、行列式を発見した。和算は明治政府が西洋文明を導入したので残念ながら廃れた。

クラームル Cramer, Gabriel (1704~1752) (スイス) その著書 (1750) に、連立一次方程式の解を行列式で表すことを初めて記述した。クラームルの公式として有名である。

ヴァンデルモンド Vandermonde, Alexandre-Theophile (1735~1796) (フランス) 音楽理論家で作曲理論の論文がある。ファンデルモンドの行列式で名を残す。

ラプラス Laplace, Pierre Simon (1749~1827) (フランス) 数理物理や天体力学でも有名だが、数学ではラプラスの展開定理やラプラス変換が重要である。

ガウス Carl Friedrich Gauss (1777~1855) (ドイツ) 数学者・物理学者・天文学者。とくに電磁気学で複素数の応用をしたことで知られる。18 世紀最大の数学者。17 歳のころから数学に興味をもちはじめ、正 17 角形の作図法を示した。ゲッティンゲン大学に学び、「すべての代数方程式は少なくとも 1 つの根をもつ」という代数学の基本定理を証明した。確率論においては、最小二乗法や確率分布の基礎理論を発展させ、正規分布のグラフは、今でもガウス曲線とよばれている。数学を測地学に応用し、大規模な測量もおこなった。連立 1 次方程式の解法では消去法を発見したことで有名である。

ヤコビ Jacobi, Karl Gustav Jacob (1804~1851) (ドイツ) ヤコビの関数行列式 (ヤコビアン) に名を留める。

クロネッカー Kronecker, Leopold (1823~1891) (ドイツ) クロネッカーのデルタは単位行列の表現として役に立つ。行列式の公理的定義をした。

グラム Gram, Jorgan Pedersen (1850~1916) (ドイツ) グラム行列式やグラム・シュミットの直交化法を発見した。現代的なアルゴリズムである。

行列の概念は、19 世紀になって現在の形になった。その起源はケイリーである。

ケイリー Cayley, Authur (1821~1895) (イギリス) 行列の理論「行列論」(1858)を出版し、行列の基礎を打ち立てた。

ハミルトン Hamilton, William Rowan (1805~1865) (アイルランド) 複素数の平面幾何の有用性を見出した．四元数を発見し，非可換代数に先鞭をつけた．ケイリー・ハミルトンの定理でも名が残る．

グラスマン Grassmann, Hermann (1809-1877) (ドイツ) 抽象的にベクトルの研究を始め，外積代数，グラスマン多様体を考案した．

シルベスター Sylvester, James Joseph (1814~1897) (イギリス) 代数的不変式論を研究した．行列式の元になる表に「マトリックス」という名称を与えた．

エルミート Hermite, Chales (1822~1901) (フランス) エルミート形式やエルミート多項式は重要である．

フロベニウス Frobenius, Georg Ferdinand (1849~1917) (ドイツ) 行列の階数を導入した．抽象群の概念を定式化し，数学における最初の抽象的な構造を創始した．

ジョルダン Jordan, Marie Ennemond Camille (1838~1922) (フランス) 置換群論や二次形式，ジョルダンの標準形，ジョルダン曲線，積分論など多方面に業績がある．

コンピュータを利用した計算

行列の積や行列式の展開は，手計算では面倒だし，よく間違える．数の計算練習としては格好の場であろうが，大規模になると手計算では限界がある．シミュレーションの現場では，万のオーダーの連立1次方程式を解く場面がある．無駄な計算は許せないし，誤差を見積もるテクニックも重要になるだろう．

行列や行列式の計算は Excel で代表される表計算ソフトでかなりのことが可能である．しかし Excel では数値計算はできるが，数式として厳密には表現できない．本書では，理論に忠実にプログラムできる数式処理ソフトである Mathematica による計算の方法を章末に掲げた．カリキュラムにこのようなソフトを取り入れるのはまだ少数派であろうが，今後はこの方法が主流になると予測する．なお Mathematica の入門は情報構造入門で扱うことになっている．

コンピュータを使えば，もっと線形代数に容易にアプローチできるかも知れないが，ワープロによって漢字が書けなくなり，電卓によって計算が出来なくなったのと同じく，数式処理によって数学が出来なくなるのは最悪だから，線形構造が身につくまでは，手計算を煩わしいと思わないで頂きたい．

線形構造を身に付けたのち，数理科学に携わる者として，より複雑な理論や応用問題に取り組むとき，頼りになるのはやはりコンピュータ代数（数式処理）ソフトである．本書ではそのような場面を想定して，少し上級の理論を理解する方法や，少し複雑な計算をする方法を記述したつもりである．

演習問題について

新たに作成した問題もあるが，巻末の参考書など多くの類書から引用させて頂いた．基

本的には、手計算で解決させるものである。**Mathematica** で解答の確認が出来ればよい。

講義と平行して演習をするとき、問題を解決する道具としてどの定理を使うかは、講義の進み具合とか、他の問題の解決の進み具合に依存することに注意して欲しい。先にある便利な（しかしまだ証明されていない）定理を勝手に使うのは理論的に許されない。

解答が掲載されていないのは、演習の時間が設けてあることによる。

筆者と線形構造・個人的な思い出

実は、筆者は代数学を専攻したが、線形代数は講義が無かったので聴講していない。学部的时候、ア・イ・マリチェフの線形代数学 1（東京図書 1960）を独習しただけである。通読しただけだと肝心なところが十分定着しないので、院試で易しいことだったが解答できなかったことを今でも思い出す。代数学が線形代数の延長にあることは数学史に関心を持ち始めて初めて認識した。学部 2 年次の代数学では、部分群と部分集合の区別がいまいだったと白状する。当然単位は取れなかった。3 年次になってもう一回代数学を履修したとき初めて目が覚めたといえる。即ち、一旦、数学的な構造が定義の上に厳密に組み立てられていて、その定義のみに忠実に従うことで書物に書いてあることが判断できると気が付いたとき、自主的な勉強ができるようになったと思う。

本書を書き終えて感ずることは、理論的な展開順序と歴史的発展の順序の逆転現象である。行列式は 1750 年より前に発見されたが、行列が意識されたのは 1850 年より後である。行列式から始めるのが歴史的であるが、現在では、行列式は行列を扱うためのツールと捉えるので、本題は行列ということになる。更に、行列は線形空間の一次変換として表現できることから、行列は図形の変換という動的な意味が付く。ここまでくれば、やはり、コンピュータで描くグラフィックスの世界である。

BASIC や **Pascal** といったプログラム言語に付き合った後、**Mathematica** に出会って、やっと自分のなすべき方向が見えてきた気がする。

原稿作成のプロセスについて

現在、ほとんどの数学論文やテキストは $\text{T}_\text{E} \text{X}$ で書かれている。本書にも多数の数式が登場するので、 $\text{T}_\text{E} \text{X}$ を利用すべきであったが、図形の挿入がやりにくいので断念した。というより、**Word** に馴れているのでそれを使う方法しか思い付かなかった。ここで、**Word** の文書に数式を埋め込むのに、アドインソフトである **MathType** を利用した。多数の数式をイメージとして貼り付けたため、パソコンが快適とは程遠い不便なものに感じたが、最速マシンに大きなメモリを付けることでやっと解決した。しかし、本文が各節毎に分かれているため、**Word** の索引作成機能が使えず、まだ不便を感じている。

最後に、本書の索引を作ってくれた森本真知子さんに感謝申し上げる。

2001 年 7 月 31 日