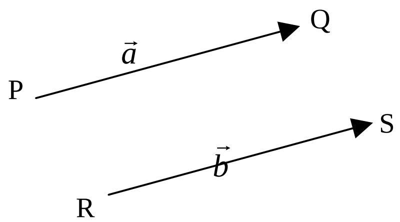
第１章　ベクトル

1.1　幾何ベクトル

長さ，温度，時間などは，それぞれ単位を定めておけば１つの実数で表わされる．このような量を**スカラー** scalar という．これに対して，力，速度などは大きさだけでなく方向をもつ量である．大きさと向きをもつ量を（**幾何**）**ベクトル**という．
幾何は付けなくても分かるときは省略して単にベクトルという．

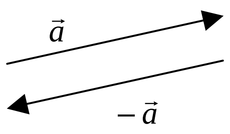
ベクトルを１つの文字で表すときは，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ または **a, b, c,…**とする．ベクトルを**有向線分** directed segment で表わすときは，始点 P，終点 Q を使って記号 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のように表す．

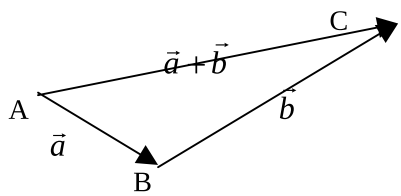


２つのベクトル$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ について, 大きさ（長さ）と向きが同じならば**等しい** equal といい

$$\vec{a}=\vec{b} \quad \text{または} \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$$

と表す．ベクトル$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$の大きさを，$|\vec{a}|$ または $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ で表わす．大きさが１のベクトルは**単位ベクトル** unit vector, identity vector という. ベクトル$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$に対して, ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$は大きさが同じであるが，向きは反対である，このベクトルを$-\vec{a}$で表し，$\vec{a}$の**逆ベクトル** inverse vector という.



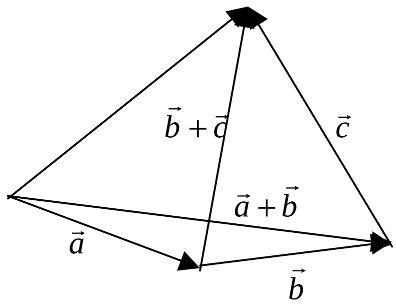


２つのベクトル$\vec{a}, \vec{b}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のように有向線分で表わすとき，有向線分$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の表すベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和** sum といい，$\vec{a}+\vec{b}$ で表わす．始点と終点が一致したベクトルを**零ベクトル** zero vector といい，$\vec{0}$ で表わす．これは大きさが 0 で向きは考えない.

すべてのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に ついての次の基本性質が成り立つ.

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a} \qquad \vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



始点と終点が同じであれば，いちいち矢印の向きを確認しないでも，単純に加法が計算できる．例えば

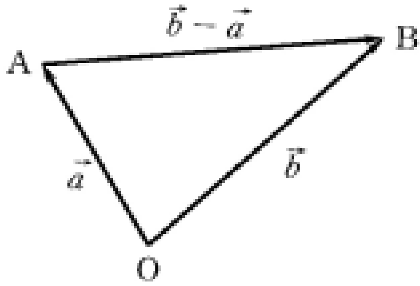
$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YX}=\overrightarrow{XX}=\vec{0} \text{ や } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD} \quad \text{や} \quad \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS} \quad \text{など}.$$

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{b}$ から $\vec{a}$ を引いた**差** difference といい，$\vec{b}-\vec{a}$ で表わす.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ のとき，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ であるから，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ である.

また，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=(-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+(-\overrightarrow{OA})$ であるから，

$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$　が成り立つ.



実数（スカラー）m とベクトル $\vec{a}$ について、**スカラー倍** scalar multiplication $m\vec{a}$（$\vec{a}$ の m 倍）を次のように定める.

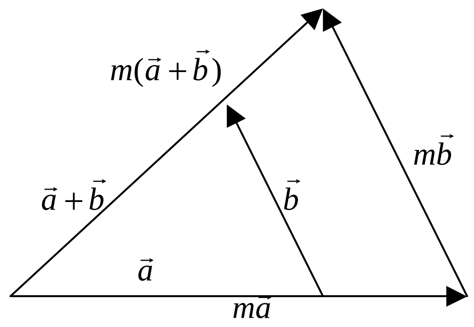
$m\vec{a}$ の大きさは $\vec{a}$ の大きさの $|m|$ 倍で、$m\vec{a}$ の向きは $m>0$ のときは $\vec{a}$ の向きと同じで、

$m<0$ のときは $\vec{a}$ の向きと逆である。$m=0$ または $\vec{a}=\vec{0}$ のときは $m\vec{a}=\vec{0}$ とする.

定義から　$1\,\vec{a}=\vec{a},\ (-1)\vec{a}=-\vec{a},\ (-m)\vec{a}=m(-\vec{a})=-m\vec{a},\ |m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$　である.

すべての実数 m, n とすべてのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，次の基本性質が成り立つ.

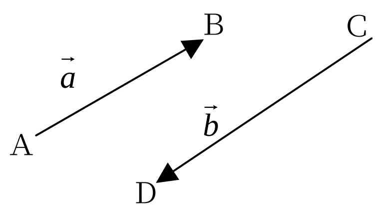
$$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a} \qquad (m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a} \qquad m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$$



零ベクトルでない２つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　とおく. 線分 AB，CD が平行

であるか重なっているとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**平行** parallel であるといい，$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ で表す.



$\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$ のとき

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$　$\Leftrightarrow$　$\vec{b}=m\vec{a}$　となる 実数 m が存在する.

$\vec{b}=m\vec{a}$ で $m=0$ の場合を許して，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと平行であると考える.

ベクトル $\vec{p}$ がいくつかのベクトルたち $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ を用いて，$\vec{p}=k_1\overrightarrow{a_1}+k\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}$ のように表せるとき，$\vec{p}$ は $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ の**１次結合** linear combination であるという.

複数のベクトルを呼ぶとき，ベクトルたちという方が分かりやすいが，日本語では単数と複数の表現をあいまいにすることが多々ある. 今後も“ たち ”は時に省略される.

いくつかのベクトルたち $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ について，

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0} \Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

が成り立つならば，これらのベクトルたち $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ は**１次独立** linearly independent であ

るという．そうでないとき，**１次従属** linearly dependent であるという．

従って，$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ が１次従属とは，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ の中に少なくとも１つは０でないものがあって，$k_1\overrightarrow{a_1} + k\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ が成り立っていることである．

これらの概念は，線形構造の中でも最も基本的であり，本質を十分理解することが肝要である．なお，複数のベクトルを「ベクトルたち」と表現したのは，英語で名詞に単数・複数の区別をすることに対応している．

幾何ベクトルたち $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について

$\vec{a}$ が一次独立である　$\Leftrightarrow$　$\vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}$ が一次独立である　$\Leftrightarrow$　$\vec{a}, \vec{b}$ は平行でない

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次独立である　$\Leftrightarrow$　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は同一平面上にない

練習問題 1.1

(1) ２つの幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が等しいとはどんなことか．

(2) ２つの幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について，$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ はどんなベクトルであるか．

(3) 始点が A である３つの幾何ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ について

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

であることを図を描いて説明せよ．

(4) ４つの幾何ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ を２つづつ括弧をつけて加える方法は全部で５通りあることを示し，これらがすべて等しいことを結合律で示せ．

(5) すべてのスカラー m について $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ を証明すること．

(6) １つの平面には，３つの１次独立な幾何ベクトルは存在しないことを示せ．

(7) 平面上の任意の幾何ベクトル $\mathbf{c}$ は平行でない２つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}\,(\neq \mathbf{0})$ の１次結合で表されることを示せ．

１次結合・１次独立・１次従属の概念の練習問題は（ベクトルの記号が代えてあるが）この章の最後にある．