

1.2 位置ベクトルと成分表示

前節 1.1 の幾何ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ のように表せたが、それを平行移動することで始点 A は任意におくことができる．とくに、固定された点 O に移動させて、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ のようにできる．以下では始点を固定させたベクトルを考えよう．

平面上に 1 点 O を固定する．このとき平面上の任意の点 P に対して、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ が定まる．このベクトル $\vec{p}$ を、点 P の **位置ベクトル** position vector という．逆に、ベクトル $\vec{p}$ が任意に与えられるとすると、 $\vec{p}$ を位置ベクトルとする点 P、つまり $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ となる点 P が平面上に定まる．

空間に 1 点 O を固定して、空間の任意の点 P に対しても、同様に点 P の位置ベクトルが定まる．

平面、または空間で直交座標系が設定されているときは、点 P の位置ベクトルとして、常に原点 O を始点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ を考えるものとする．

座標平面上の原点を O とする．点 E (1,0), F (0,1) について

$$\vec{i} = \overrightarrow{OE}, \vec{j} = \overrightarrow{OF}$$

とおき、これらを x 軸方向および y 軸方向の **基本ベクトル** fundamental vector, standard unit vector という．O を始点、A を終点とするベクトル $\overrightarrow{OA}$ を A の **位置ベクトル** position vector, located vector という．

平面上のベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となるように点 A (a_x, a_y) をとると

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

と表すことができる． a_x, a_y をそれぞれ $\vec{a}$ の **x 成分** x-component、**y 成分** y-component という．逆に、実数の組 (a_x, a_y) に対して、 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ によりベクトル $\vec{a}$ が定まる．これを

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

と書き、ベクトルの **成分表示** representation by components という．

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_x, b_y)$ について

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

$$m\vec{a} = (ma_x, ma_y)$$

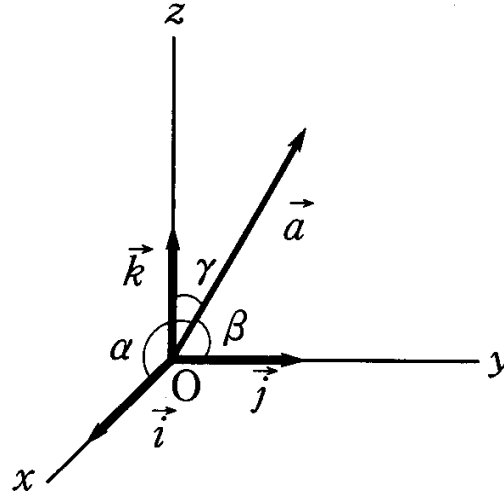
座標空間の原点を O とする．点 E (1,0,0), F (0,1,0), G (0,0,1) について

$$\vec{i} = \overrightarrow{OE}, \vec{j} = \overrightarrow{OF}, \vec{k} = \overrightarrow{OG}$$

とおき、これらを x 軸方向、y 軸方向および z 軸方向の **基本ベクトル** という．空間のベクトル $\vec{a}$ に対して、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ となるように点 A (a_x, a_y, a_z) をとると

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

と表すことができる． a_x, a_y, a_z をそれぞれ $\vec{a}$ の x 成分， y 成分， z 成分という．逆に，実数の組 (a_x, a_y, a_z) に対して， $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ によりベクトル $\vec{a}$ が定まる．これを $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と書き，ベクトルの成分表示という．その大きさは $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ である．



ベクトル $\vec{a}$ が x 軸， y 軸， z 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β, γ とするとき， $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$ ， $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$ ， $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ である． $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ の値をそれぞれ $\vec{a}$ の x 軸， y 軸， z 軸方向に対する方向余弦 direction cosine という．

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_x, a_y, a_z)$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_x, b_y, b_z)$ について

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$m\vec{a} = (ma_x, ma_y, ma_z)$$

これらの式から

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

$$m\vec{a} + n\vec{b} = (ma_x + nb_x, ma_y + nb_y, ma_z + nb_z)$$

さらに，統合すればベクトルの数を3個以上に拡張できる．記号を代えて

$\vec{x}_i = (a_i, b_i, c_i) (i=1, 2, \dots, n)$ に対して

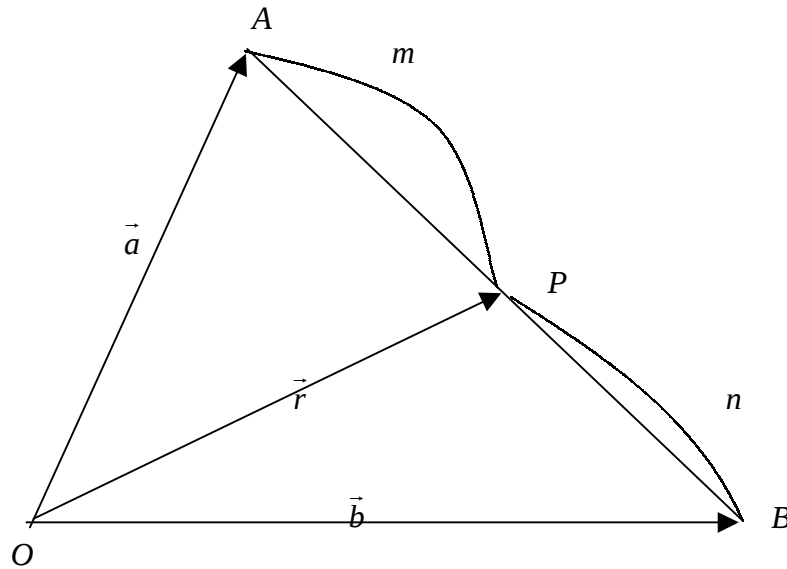
$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i a_i, \sum_{i=1}^n m_i b_i, \sum_{i=1}^n m_i c_i \right)$$

2点 $A(a_x, a_y, a_z)$ と $B(b_x, b_y, b_z)$ の距離はベクトル $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ の大きさだから $\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$ より

$$AB = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

である．

位置ベクトルが $\vec{a}, \vec{b}$ である 2 点 A, B に対し, 線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると, P の位置ベクトルは、 $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ である．また, 線分 AB を $m:n$ ($m \neq n$) に外分する点を Q とすると, Q の位置ベクトルは、 $\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ である．



空間において, 線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とし, A, B, P の位置ベクトルを $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (p_x, p_y, p_z)$ とすると,

$$p_x = \frac{na_x + mb_x}{m+n}, \quad p_y = \frac{na_y + mb_y}{m+n}, \quad p_z = \frac{na_z + mb_z}{m+n}$$

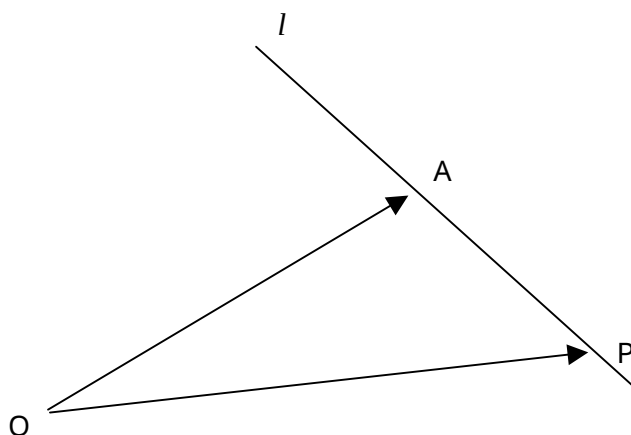
である．外分する点についても同様である．

$m:n$ に外分することは, $m:-n$ に内分する (あるいは $-m:n$ に内分する) と考えればよい．

点 A を通り, ベクトル $\vec{v} (\neq \vec{0})$ に平行な直線 l を考える． l 上の任意の点を P とする．A, P の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{r}$ とおく．このとき, $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ (t は実数) と表され, $\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AP}$ だから直線 l はベクトルと媒介変数 t を用いて $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$ となる．このとき $\vec{v}$ を直線 l の方向ベクトル direction vector という．

ベクトルを用いて図形をあらわす方程式は、図形のベクトル方程式という．

この方法で直線を表せば, 平面の直線が y 軸に平行でも平行でなくても同じ扱い方で表現できる．また, 平面の直線も, 空間の直線も同じ考え方で捉えられる．



座標空間における直線と平面の方程式をベクトル方程式から求めることができる。

直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とし、 $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \neq \vec{0}$ とおくと、 A を通り $\vec{v}$ に平行な直線 l の方程式は、

$$x = x_0 + tv_x, \quad y = y_0 + tv_y, \quad z = z_0 + tv_z$$

あるいは

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \quad (\text{ただし、分母が0のとき、その分子を0とする})$$

となる。

練習問題 1.2

- (1) 2点 $A(1, 1, 4)$, $B(-3, 1, 5)$ の間の距離を求めよ。
- (2) 2点 $A(1, 1, 4)$, $B(-3, 1, 5)$ を結ぶ線分 AB について、次の各点の座標を求めよ。
 中点
 AB を 2:1 に内分する点
 AB を 2:1 に外分する点
- (3) 次の直線の方程式を求めよ。
 点 $(1, 3, 5)$ を通り、ベクトル $\vec{v} = (-1, 2, -5)$ に平行な直線
 2点 $A(1, 2, 4)$, $B(-3, 1, 7)$ を通る直線
 2点 $A(-3, 2, 5)$, $B(-1, 2, 6)$ を通る直線
- (4) ベクトル $\vec{a} = (-2, 1, 2\sqrt{5})$ の方向余弦を求めよ。また、このベクトルが x 軸, y 軸, z 軸の正の方向となす角を求めよ。
 (ヒント：角は逆三角関数を使うと表わせる)