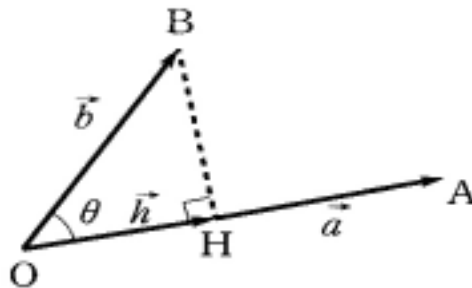


1.3 ベクトルの内積と外積

零ベクトルでない2つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。
 点 B から OA (またはその延長) に下した垂線の足を H とする。ベクトル $\vec{h} = \overrightarrow{OH}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影** orthogonal projection という。 $|\vec{h}| = |\vec{a}| \cos \theta$ である。さて、 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積** inner product (または**スカラー積** scalar product) といい、 $(\vec{a}, \vec{b})$ または $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表わす。ただし、 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは θ が定まらないが $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とする。



$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ ならば $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行 ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) である。 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ならば、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**垂直** perpendicular であるといい、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ で表す。すべてのベクトル $\vec{a}$ について $\vec{a} \perp \vec{0}$ と考える。

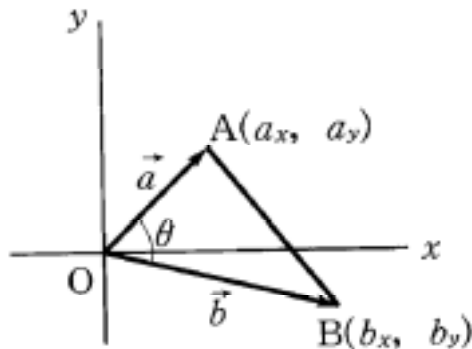
$\vec{a} \perp \vec{b}$ であるための必要十分条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。

定義により、次を示すことができる。

内積について、次の性質が成り立つ。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 \\ (m\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) & \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

平面のベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ について、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算する式を求める。



$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ とし, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とする. $A(a_x, a_y), B(b_x, b_y)$ とすると, AOB における余弦定理から

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$$

ここで, $AB^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2$, $OA^2 = a_x^2 + a_y^2$, $OB^2 = b_x^2 + b_y^2$ と

$OA \cdot OB \cos \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ であることから

$$(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

よって, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ が得られる.

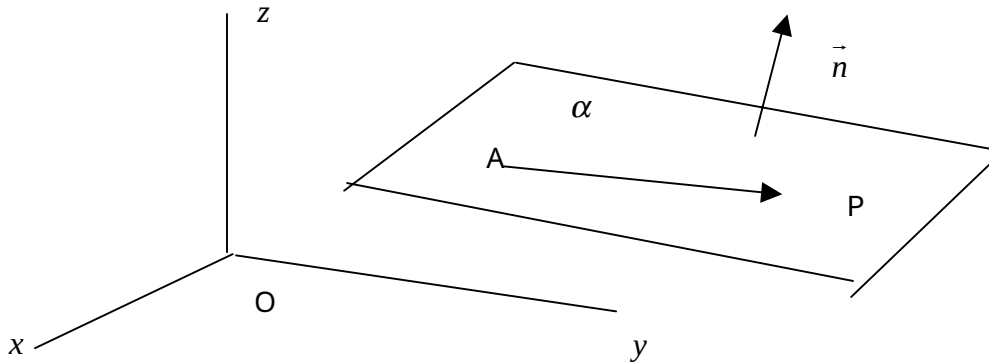
空間のベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のときも同様である.

内積について、次の性質が成り立つ.

$$\vec{a} = (a_x, a_y), \vec{b} = (b_x, b_y) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

点 A を通り、ベクトル $\vec{n} (\neq \vec{0})$ に垂直な平面 α を考える. α 上の任意の点を P とする. A, P の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{r}$ とおく. $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ と $\vec{n}$ は直交するから, 平面 α のベクトル方程式は, $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0$ となる. $\vec{n}$ は平面 α の**法線ベクトル** normal vector という.



座標空間における平面の方程式をベクトル方程式から求める.

平面 α 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とし, $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) \neq \vec{0}$ とすれば, A を通り $\vec{n}$ に垂直な平面 α の方程式は

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

となる.

これから, 平面の方程式は x, y, z の一次方程式として

$$ax + by + cz + d = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

の形であり, その係数のベクトル (a, b, c) はその平面の法線ベクトルである.

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = (b_x, b_y)$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とし, 2つの線分 PQ, PR を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$S = |a_x b_y - a_y b_x|$$

ここで, 絶対値記号の中は, 行列式の記号を用いて $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ と表せる.

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad S &= |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \sin \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)^2} \\ &= \sqrt{(|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{(a_x b_y - a_y b_x)^2} = |a_x b_y - a_y b_x| \quad (\text{終}) \end{aligned}$$

座標空間内の 3 点 P, Q, R に対して, $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = \overrightarrow{PR} = (b_x, b_y, b_z)$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とし, 2 つの線分 PQ, PR を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$S = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

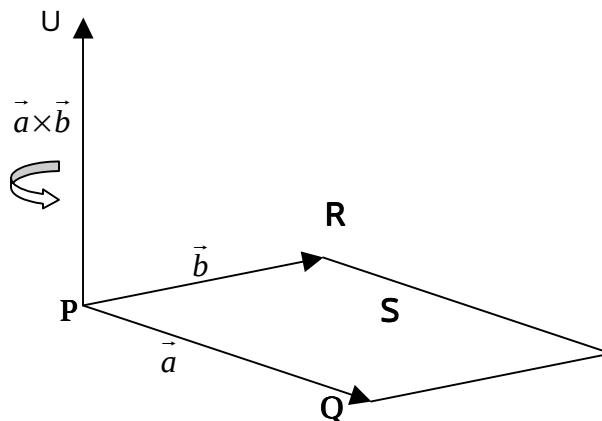
ここで, 点 U を $\overrightarrow{PU} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

で定めると,

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PU}, \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PU}, |\overrightarrow{PU}| = S$$

$\overrightarrow{PU}$ を $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の外積ベクトル outer vector, exterior product, vector product といい, $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ と表わす.



$\overrightarrow{PU}$ の方向は, $\overrightarrow{PQ}$ から $\overrightarrow{PR}$ へ右ねじの進む方向である.

$\vec{a}$ または $\vec{b}$ が $\vec{0}$ のときは $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ であると定義する.

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

外積について、次の性質がある.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

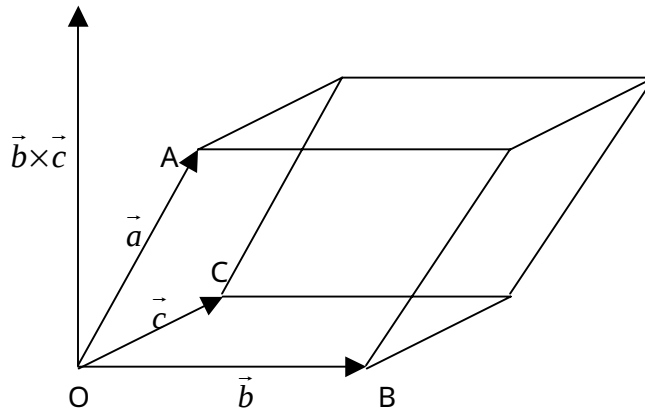
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \quad \text{ヤコビの等式}$$

外積は, 加法に対して分配的ではあるが, 非可換的であり, 非結合的な演算であるので, 運用には細心の注意をしなければならない.

座標空間内の4点O, A, B, Cに対して, 3つの線分OA, OB, OCを稜とする平行六面体の体積をVとする. $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = (c_x, c_y, c_z)$ とすると

$$\begin{aligned} V &= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \\ &= |a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x| \end{aligned}$$



絶対値の記号の中は複雑であるが, 第3章に出てくる行列式の記号を使えば

簡単に $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ となる.

証明 $\vec{b}, \vec{c}$ が定める平行四辺形の面積を S とすると, $S = |\vec{b} \times \vec{c}|$ である. $\vec{a}$ と $\vec{b} \times \vec{c}$ のなす角を φ とすると, 平行六面体の高さ h は $h = |\vec{a}| |\cos \varphi|$ である. 従って, 内積の定義から, $V = hS = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| |\cos \varphi| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ となる. (終)

練習問題 1.3

(1) 内積に関する次の等式を証明せよ.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \vec{b}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{a} \cdot \vec{b}_k$$

(2) OAB において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2), \overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$ とし, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ ,

OAB の面積を S とするとき, $S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ であることを示せ.

(3) 直線 $l: 2x + 3y = 7$ とベクトル $\vec{n} = (2, 3)$ があるとき,

l 上に任意の 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ をとるとき, $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$ を示せ.

原点 O と直線 l との距離を求めよ.

(4) 次の 2 直線 g, l のなす角 $\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ を求めよ.

$$g: \frac{x-1}{2} = y-5 = z-1, \quad l: \frac{x+3}{2} = \frac{y+7}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

$$g: \frac{x+3}{3} = y+1 = \frac{z-3}{3}, \quad l: x-6 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$$

(5) 次の平面の方程式を求めよ.

点 $A(3, 2, 1)$ を通り, ベクトル $\vec{n} = (1, 4, 3)$ を法ベクトルとする平面

点 $A(2, 1, 4)$ を通り, 次の直線 l に垂直である平面

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

点 $A(2, 3, 4)$ を通り, 次の 2 つの直線 l_1, l_2 に平行な平面

$$l_1: \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{3}, \quad l_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = z+2$$

- (6) 次の2平面の交線としての直線の方程式を求めよ.

$$\begin{cases} x+y+z-5=0 \\ 3x-y-4z-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ 3x-y+2z=5 \end{cases}$$

- (7) 点 A(2,1,3) を通り, 次の2つの直線 l_1, l_2 に垂直な直線の方程式をもとめよ.

$$l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-5}{-3}, \quad l_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{5}$$

- (8) 交わる次の直線 g, l を含む平面の方程式を求めよ.

$$g: x+1 = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{2}, \quad l: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-6}{3} = -z$$

- (9) ベクトルの外積が, 加法に対して分配的であること, 即ち

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

であることを, 適当な図を描いて説明せよ.

- (10) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}$

を用いて $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ に対して, 次式が成り立つことを示せ.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

- (11) 次の等式が成り立っているベクトルの例をあげること.

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$