1.4　数ベクトル

２個または３個の数を

$$(a_1, a_2) \quad や \quad (a_1, a_2, a_3)$$

のように横に並べたものを**行ベクトル** row vector という．また，２個または３個の数を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad や \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

のように縦に並べたものを**列ベクトル** column vector という．行ベクトルと列ベクトルを合わせて（２項または３項の）**(数)ベクトル**という．いずれの場合も、a_i をその数ベクトルの**第 i 成分** i-th component という．列ベクトルは

$$^t(a_1, a_2) \quad や \quad ^t(a_1, a_2, a_3)$$

のように書かれる場合がある．ベクトルと区別して普通の実数また複素数を**スカラー** scalar という．

（３項の）行ベクトル(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3) について

相等　$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

加法（和）　$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

スカラー倍　$k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

と定義する．列ベクトルの場合も同様である．

すべての成分が 0 である数ベクトル$(0, 0, 0)$ および $^t(0, 0, 0)$ を**零ベクトル**といい, 簡単に $\mathbf{0}$ で表す．行ベクトル$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対して，$\mathbf{x} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ とおくと，$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ が成り立つ．$\mathbf{x}$ を $\mathbf{a}$ の**逆ベクトル**といい、$\mathbf{x} = -\mathbf{a}$ で表わす．このとき $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ が成り立つ．

（３項の）列ベクトルの全体を R^3 とおくとき,

(A0)　$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3 \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in R^3$　（**加法で閉じる**）

(A1)　すべての$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R_3$ について $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ が成り立つ．（**交換律**）

(A2)　すべての$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^3$ について $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ が成り立つ．（**結合律**）

(A3)　$\mathbf{0} \in R^3$ はすべての $\mathbf{a} \in R^3$ について $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ を満たす．（**0 の存在**）

(A4)　すべての $\mathbf{a} \in R^3$ について $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{x} \in R^3$ が存在する．（**逆元の存在**）

R^3 が満たすこれらの性質を称して，R^3 は加法について**加法群** additive group または（特に交換律を強調して）**アーベル群** abelian group をなすという．

行ベクトルの全体 R_3 についても同様である．

アーベル群は，代数学の中で最も基本的な代数系であり，重要な概念である．

（３項の）列ベクトルの全体 R^3 のなすアーベル群は，更に

(S0)　$k \in R,\ \mathbf{a} \in R^3 \Rightarrow k\mathbf{a} \in R^3$　（**スカラー倍で閉じる**）

(S1)　すべての $k \in R$ とすべての $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in R^3$ について $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ が成り立つ．
（ベクトルに関する**分配律**）

(S2)　すべての $k,\ l \in R$ とすべての $\mathbf{a} \in R^3$ について $(k+l)\mathbf{a} = k\mathbf{a}+l\mathbf{a}$ が成り立つ．
（スカラーに関する**分配律**）

(S3)　すべての $k,\ l \in R$ とすべての $\mathbf{a} \in R^3$ について $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$ が成り立つ．
（スカラーに関する**結合律**）

(S4)　すべての $\mathbf{a} \in R^3$ について $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ である．　（スカラー１に関する**ユニタリ**）

を満たす．アーベル群の条件(A0)～(A4)に，更に(S0)～(S4)を追加した R^3 の構造を称して，R^3 は，３次元**数ベクトル空間** vector space であるという．

列ベクトルの全体 R_3 についても同様である．

アーベル群やベクトル空間の概念は，最初に出会ったときすぐ理解するのは困難であろう．ここでは，これらの概念を抽象的に展開するのでなく，同様な構造をもつ例を繰り返し挙げて，慣れさせることで数学的な対象物に近づけさせようとしている．交換律や結合律等の意味もしだいに理解して欲しい．次に登場するベクトルの 1 次独立・1 次従属，生成する部分空間や基底も通り一遍で分かるものではないが，きちんと定義を理解し，定義に従って計算していくことで身に付けるものである．

一般に，ベクトル $\mathbf{v}$ がいくつかのベクトルたち $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ によって，

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_t\mathbf{u}_t$$

となるとき，$\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ の**１次結合**または**線形結合** linear combination で表されるという．

ベクトルたち $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ について

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_t\mathbf{u}_t = \mathbf{0} \text{ ならば } k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$$

であるとき, $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ は**１次独立**または**線形独立** linearly independent であるという．

そうでないとき，すなわち

$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_t\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$ であるが $k_1,k_2,\ldots,k_t$ の中の少なくとも１つが 0 でないとき，ベクトルたち $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ は**１次従属**または**線形従属** linearly dependent であるという．

1 次結合や 1 次独立や 1 次従属という言い方で，ベクトルたちがどんな状況であるかを述べるが，そこに現れるスカラー（$k_1,k_2,\ldots,k_t$ など）が何であるかは明示しない．ここではスカラーは主役ではなく脇役である．しかし，スカラーがどうなっているかはいつも気にしなければならない．

$\mathbf{e}_1=(1,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1)$ とおくと，R^3 のベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ は

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$$

となるので，R^3 の任意のベクトルは $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ の１次結合で表される．また，$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ は１次独立である．

$3(1,2,3)-(-1,2,2)=(4,4,7)$ であるから，$\mathbf{a}=(1,2,3),\mathbf{b}=(-1,2,2),\mathbf{c}=(4,4,7)$ とおくと，$\mathbf{c}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の１次結合である．また，$3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}=\mathbf{0}$ であるから，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ は１次従属である．

R^3 の３つのベクトルたち $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ が１次独立で，R^3 の任意のベクトルが $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ の１次結合で表わされるとき，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ を R^3 の**基底** basis という．

R^3 の空でない部分集合 V が

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\in V\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$$

$$\mathbf{a}\in V\Rightarrow k\mathbf{a}\in V \quad （k \text{ は任意の実数}）$$

を満たすとき，V は R^3 の**部分空間** subspace （詳しくは，**部分ベクトル空間**）であるという．

任意の部分空間 V について $\mathbf{0}\in V$ である．

R^3 や $\{\mathbf{0}\}$ は R^3 の部分空間である．これらは**自明な** trivial 部分空間という．

R^3 の $\mathbf{0}$ でない１つのベクトル $\mathbf{u}$ をとり $V=\{k\mathbf{u}\mid k\in R\}$ とおくと，V は自明でない部分空間をなす．

いくつかのベクトルたち $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ を固定して，それらの１次結合で表わされるベクトルの集合を V とおく：

$$V=\{k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_t\mathbf{u}_t\mid k_1,k_2,\ldots,k_t\in R\}$$

V は R^3 の部分空間である. これを $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ から**張られた** spanned，または**生成した** generated 部分空間という．また V を $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t\rangle$ と表わすことがある．$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ が一次独立のときは，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ を V の基底という．

張られた（とか生成した）という用語は過去形の言い方であるが，これから部分空間を作るのであれば，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ から張る（生成する）部分空間を V とするなどと云ってよい．

計算例１　$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\in R_3 \mid x+y=0\right\}$，$V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R_3 \mid x+y+z=0\right\}$とおくと，

$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\0\end{pmatrix} \mid x\in R\right\}$だから，$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$とおくと，$V_1=\langle\mathbf{u}\rangle$で，$\mathbf{u}$は$V_1$の基底である．また

$V_2=\left\{\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix} \mid y,z\in R\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mid s,t\in R\right\}$であるから，$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

とおくと，$V_2=\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$ となり，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ はV_2の基底である．

上のV_1は$\mathbf{u}$で生成されるだけでなく，$\mathbf{u}_1$でも生成される．V_2を生成するベクトルは$-\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$でもよいし，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1$でもよい．このように，部分空間を生成するベクトルは一意的ではない. しかし, 部分空間の基底の数は一意的である. すなわち部分空間Vがt個の１次独立なベクトルたち$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_t$ の１次結合で表わされ，またVがs個の１次独立なベクトルたち$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_s$ の１次結合でも表わされるとき，$t=s$である．（ここではその証明は行わない）．その数tを部分空間の**次元** dimension と呼び $\dim(V)=t$で表わす．この記号で$\dim(V_1)=1$，$\dim(V_2)=2$ となる．

$\dim(R^3)=3, \dim(\{\mathbf{0}\})=0$である． R^3の自明でない部分空間の次元は１か２である．

V_1,V_2 が R^3 の部分空間であるとき 　$V_1\cap V_2=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in V_1 \ \&\ \mathbf{x}\in V_2\}$ はR^3 の部分空間である. 　$V_1+V_2=\{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\mid \mathbf{x}_1\in V_1 \ \&\ \mathbf{x}_2\in V_2\}$ はR^3 の部分空間である.

証明　$\mathbf{0}\in V_1$かつ$\mathbf{0}\in V_2$より$\mathbf{0}\in V_1\cap V_2$ だから $V_1\cap V_2\neq\varnothing$ である. 任意の$\mathbf{a},\mathbf{b}\in V_1\cap V_2$とスカラー$k$をとる．$V_1\cap V_2\subset V_1$ だから $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V_1$ である．ここで V_1 は部分空間だから，$\mathbf{a}+\mathbf{b}, k\mathbf{a}\in V_1$ である．同様に，$\mathbf{a}+\mathbf{b}, k\mathbf{a}\in V_2$ でもある．ゆえに，$\mathbf{a}+\mathbf{b}, k\mathbf{a}\in V_1\cap V_2$が成り立つので，$V_1\cap V_2$ は部分空間である．

次に，任意の$\mathbf{a},\mathbf{b}\in V_1+V_2$ とスカラーkをとる．V_1+V_2 の定義から，

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2(\mathbf{a}_1\in V_1,\ \mathbf{a}_2\in V_2),\quad \mathbf{b}=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2(\mathbf{b}_1\in V_1,\ \mathbf{b}_2\in V_2)$$

と表される．ここで V_1 は部分空間だから $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1\in V_1$ である．同様に $\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2\in V_2$ でもある．ここで $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)+(\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2)$，$\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1\in V_1$，$\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2\in V_2$ である．また，

$k\mathbf{a}=k(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)=k\mathbf{a}_1+k\mathbf{b}_1$，$k\mathbf{a}_1\in V_1$，$k\mathbf{a}_2\in V_2$ だから，V_1+V_2 は部分空間である．（終）

計算例２　$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R_3 \mid x+y+z=0\right\}, V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R_3 \mid x+2y+3z=0\right\}$とおくと，

$V_1\cap V_2=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in V_1 \ and\ \mathbf{x}\in V_2\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x+y+z=0, x+2y+3z=0\right\}$であるが,

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=0\end{cases}$$ から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ （z は任意）

であるから$V_1\cap V_2=\left\{t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\mid t\in R\right\}$となり，$V_1\cap V_2$は１つのベクトル$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$で張られ,

これは零ベクトルではないので１次独立であり$V_1\cap V_2$の基底である．

計算例３　計算例２のV_1, V_2について,

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}\mid y,z\in R\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\mid s,t\in R\right\},$$

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix}\mid y,z\in R\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\mid s,t\in R\right\}$$

であるから，V_1+V_2 はベクトルたち $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$で張られる．しかし,

$$(-2)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$ であり，$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ は１次独立だから，V_1+V_2

は $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ で張られ，これらが V_1+V_2 の基底である.

なお，$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\in V_1$，$\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\in V_2$ とおくと，$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in V_1\cup V_2$ である．しかし

$$\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\notin V_1\cup V_2$$ であるので，が，　$V_1\cup V_2$ はベクトルの和で

閉じていない．従って $V_1\cup V_2$ は部分空間ではない.

R^3 の一次独立な２つのベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ が与えられたとき，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の１次結合

$$\mathbf{q}=s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

の全体の集合は，原点Ｏを通る平面をなす．これを $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で定まる平面という.

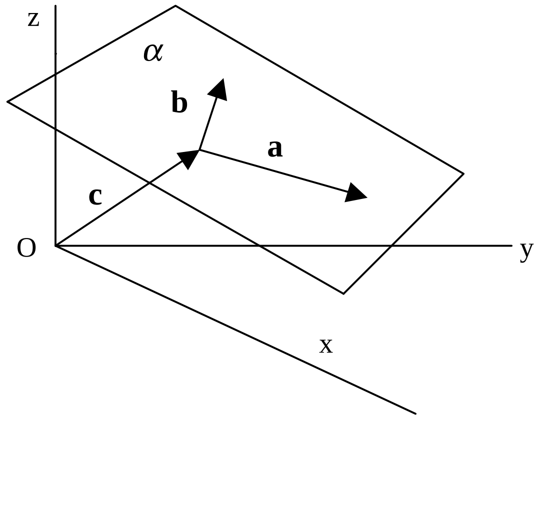
更に，与えられたベクトル $\mathbf{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に対して，$\mathbf{q}=\mathbf{p}-\mathbf{c}$ が $\mathbf{q}=s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ を満たすとき，

$$\mathbf{p}=\mathbf{c}+s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

となるようなベクトル $\mathbf{p}$ の全体αは，Ｃを通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で定まる平面となる．集合の記号で

$$\alpha=\{\mathbf{c}+s\mathbf{a}+t\mathbf{b}\mid s,t\in R\}$$

である.



平面αのベクトル方程式 $\mathbf{p}=\mathbf{c}+s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ において，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が１次独立であることに注意して，

$$\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a},\ \ \mathbf{d}=\mathbf{b}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})\mathbf{u},\ \ \mathbf{v}=\frac{1}{|\mathbf{d}|}\mathbf{d}$$

とおく．（$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{d}\neq\mathbf{0}$ である）．

このとき，$|\mathbf{u}|=1,\ |\mathbf{v}|=1$ であり，さらに

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\frac{1}{|\mathbf{d}|}(\mathbf{b}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})\mathbf{u})=\frac{1}{|\mathbf{d}|}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})-\frac{1}{|\mathbf{d}|}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})=0$$

がなりたつ．

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ はそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の一次結合であり，逆に $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ はそれぞれ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の１次結合である．

$$\mathbf{p}=\mathbf{c}+s'\mathbf{u}+t'\mathbf{v}$$

と表すとき，s, t と s', t' の間には，次の関係がある．

$$s=\frac{s'}{|\mathbf{a}|}-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\frac{t'}{|\mathbf{d}|},\ \ t=\frac{t'}{|\mathbf{d}|},\ \ |\mathbf{d}|=\frac{\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{a}|}$$

上のようにして，１次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ から，大きさ１で直交するベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を得るが，この手順を**正規直交化** orthonormalization という．

一般に，２つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が $|\mathbf{u}|=1,\ |\mathbf{v}|=1,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ を満たすとき，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の組を**正規直交系** orthonormal system という．

以上から, 平面αを正規直交系をなすベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ で $\mathbf{p}=\mathbf{c}+s'\mathbf{u}+t'\mathbf{v}$ のように表わした.

上の方法を使って，３個の１次独立なベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ から，大きさ１で互いに直交する３つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を作ってみよう．

まず，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が１次独立より，上の結果から，ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が $|\mathbf{u}|=1,\ |\mathbf{v}|=1,\ \mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ を満たすようにとれる．さて，$\mathbf{e}=\mathbf{c}-(k\mathbf{u}+l\mathbf{v})$ とおき $\mathbf{e}\perp\mathbf{u}, \mathbf{e}\perp\mathbf{v}$ であるとしよう．このとき $\mathbf{e}\cdot\mathbf{u}=0, \mathbf{e}\cdot\mathbf{v}=0$ から $k=\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}, l=\mathbf{c}\cdot\mathbf{v}$ となる．従って $\mathbf{e}=\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のそれぞれと直交する．また，$\mathbf{e}\neq\mathbf{0}$ である．そこで $\mathbf{w}=\frac{1}{|\mathbf{e}|}\mathbf{e}$ とおく．$|\mathbf{w}|=1, \mathbf{w}\perp\mathbf{u}, \mathbf{w}\perp\mathbf{v}$ が満たされる. 構成の仕方から，$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ はそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の１次結合であり, 逆に $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はそれぞれ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の１次結合である．

練習問題 1.4　次のうち，(1)～(12) は示すこと．

(1) ベクトル $\mathbf{x}$ が $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の１次結合で表わされるならば, $\mathbf{x}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の１次結合で表わされる．

(2) ベクトル $\mathbf{x}$ が $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の 1 次結合で表わされ，$\mathbf{b}$ が $\mathbf{c},\mathbf{d}$ の 1 次結合ならば，$\mathbf{x}$ は $\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}$ の 1 次結合で表わされる．

(3) ベクトル $\mathbf{x}$ が $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の 1 次結合で表わされ，$\mathbf{a},\mathbf{b}$ がそれぞれ $\mathbf{c},\mathbf{d}$ の 1 次結合ならば，$\mathbf{x}$ は $\mathbf{c},\mathbf{d}$ の 1 次結合で表わされる．

(4)　ベクトル $\mathbf{x}$ が $k\mathbf{a},l\mathbf{b},m\mathbf{c}$ の 1 次結合で表わされるならば，ベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の 1 次結合で表わされる．

(5)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次独立ならば，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{0}$ でなく，$\mathbf{a},\mathbf{c}$ は 1 次独立である．

(6)　$\mathbf{a},\mathbf{0},\mathbf{c}$ は 1 次従属である．また $\mathbf{a},\mathbf{c}$ が 1 次従属ならば，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ は 1 次従属である．

(7)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次従属ならば，$\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}$ も 1 次従属である．

(8)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次独立ならば，$\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}$ も 1 次独立である．

(8)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次独立ならば，任意のスカラー k に対して，$\mathbf{a},\mathbf{b}+k\mathbf{a},\mathbf{c}$ も 1 次独立である．

(9)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次従属ならば，任意のスカラー k に対して，$\mathbf{a},\mathbf{b}+k\mathbf{a},\mathbf{c}$ も 1 次従属である．

(10) ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が 1 次独立ならば，0 でないスカラー k,l,m に対して，$k\mathbf{a},l\mathbf{b},m\mathbf{c}$ は 1 次独立である．

(11)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ について $<\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}>\subset<\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}>$ である．

(12)　ベクトルたち $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ について $<\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{c}+\mathbf{a}>=<\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}>$ である．

(13)　４つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ を

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

とする．$\mathbf{a}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3$ と表現したときのスカラー x_1, x_2, x_3 を求めること．

(14) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ は一次独立であることを示し，$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の一次結合で表わすこと．

(15) １次独立なベクトル $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ から正規直交基底をつくること．