

1.5 Mathematica による計算 I

Mathematica を利用するための最小限の予備知識

- ・コンピュータの起動と終了の方法
- ・ Mathematica の起動と終了の方法
- ・ 半角の英数字モードで，テキストを見ながらコマンドが入力できること
 - ・ コマンドを実行させること
 - ・ 出力結果が十分理解できること

キャンパス内に教えてくれる人がいるので遠慮しないで聞いてみよう

1 2つのベクトルにラベルを付けて和と差を計算する.

次の4行を入力する. In[1]:= は実行後に付けられるので, 入力しない. 括弧は中括弧 { } に限る. 上の2行の行末はセミコロン(;)である. セミコロンがないときは, 問題がオウム返しされる. 答を要求するコマンドには, セミコロンを付けない. 見かけは行ベクトルだが, Mathematica では行と列の区別はない.

```
In[1]:=a={1,2,1};
      b={2,1,-1};
      a+b
      a-b
Out[3]={3,3,0}
Out[4]={-1,1,2}
```

答は $\{3, 3, 0\}$ と $\{-1, 1, 2\}$ である.

2 2つのベクトルの内積と外積.

上の2つのベクトルをそのまま使うのであれば, 計算式を入力するだけでよい. 内積はドット(.)である. 中ポツ(・)ではない. 外積は Cross という関数を使う. 先頭の C は大文字で, 関数の引数を入れる括弧は [] を用いる.

```
In[5]:=a.b
      Cross[a,b]
Out[5]=3
Out[6]= {-3, 3, -3}
```

答は 3 と $\{-3, 3, -3\}$ である. 今後, In[] や Out[] は省略する.

3 ベクトルの成分を抽出し, その大きさを計算する.

ベクトル a の k 番目の成分は a[[k]] で抽出できる.

24 第1章 ベクトル

x の α 乗 (べき乗) を求める関数 `Power[x,  $\alpha$ ]` または 簡単な記号 x^α を用いる.

x の平方根は `Sqrt[x]` または $x^{(1/2)}$ とする.

k が 1 から 3 まで動くときの和は `Sum` も利用できる.

従って, a の大きさを求めるには次のどれでもよい.

```
Sqrt[a[[1]]^2+a[[2]]^2+a[[3]]^2]
Sqrt[Sum[a[[k]]^2,{k,1,3}]]
(a[[1]]^2+a[[2]]^2+a[[3]]^2)^(1/2)
Sqrt[a.a]
```

4 2つのベクトルの大きさとなす角を求める. 逆三角関数アークコサイン $\cos^{-1}(x)$ は `ArcCos` を用いる.

```
la=Sqrt[a.a]
lb=Sqrt[b.b]
c=a.b/(la lb)
ArcCos[c]
Clear[a,b]
```

答は $\sqrt{6}$ $\sqrt{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3}$ である.

a や b はクリアしない限り保持されている. クリアするには, `Clear[a,b]` とする.
また, 別のものを割り当ててもよい.

5 いくつかのベクトルが1次独立であることを示す.

零ベクトル $\vec{o}$ は `0={0,0,0}` とおけばよい. あるいは `0=Table[0,{3}]` でもよい.
スカラー x とベクトル a の積は `*` を使って $x*a$ としてもよいが, 空白を入れて $x a$ でもよい. 方程式を記述するとき, 等号が2つ付いて `==` となる. `Solve` では未知数が何であるかを指定しておく.

```
a = {1, 2, 3};
b = {1, 4, 9};
c = {1, 8, 27};
o = {0, 0, 0};
Solve[x a + y b + z c == o, {x, y, z}]
```

`{x -> 0, y -> 0, z -> 0}` と出力する. `Solve` による解の集合が `{ }` の中に求められるが, 1組の解 $(x,y,z)=(0,0,0)$ に限るということから, a,b,c が1次独立が示されている.

6 添え字をもつベクトルを定義し、 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ を証明する.

添え字を [] 内に入れて、ベクトル $\{a[1], a[2], a[3]\}$ を作成するには

$\text{Array}[a, \{3\}]$ とする. $\vec{p} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{p} = \vec{0}$ であることを示せばよい. 即ち $\{0, 0, 0\}$ と
なればよい.

```
p=Array[a, {3}];
q=Array[b, {3}];
Cross[p,q]+Cross[q,p]
```

7 $m, n, \vec{a}, \vec{b}$ を与えて、ベクトル方程式 $m(\vec{x} - \vec{a}) = n(\vec{b} - \vec{x})$ を解く.

```
m=3;
n=2;
a={1,2,3};
b={11,12,13};
p=Array[x, {3}]
Solve[m (p-a)==n (b-p),p]
```

答の表示が $\{\{x[1] \rightarrow 5, x[2] \rightarrow 6, x[3] \rightarrow 7\}\}$ であることから、 $\vec{x} = (5, 6, 7)$ である.

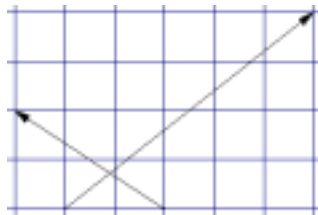
8 平面ベクトルを描く.

グラフィックスを利用するので、アドオンパッケージを開く. 次をまず実行しておく.

```
<<Graphics`Master`
```

矢印は Arrow という関数で、始点と終点を指定する. RGBColor で矢印に色を付ける. 格子を入れ、目盛の縦横比を 1:1 にする. 色は指定しなければ、既定色の黒である.

```
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],Arrow[{0,0},{5,4]},
RGBColor[0,1,0],Arrow[{2,0},{-1,2]}},
AspectRatio->Automatic,GridLines->Automatic]]
```



9 1次独立なベクトルから正規直交系を求める.

グラム・シュミットの直交化法を利用するためパッケージを読み込む.

```
<<LinearAlgebra`Master`
```

1次独立なベクトルの組 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ を与えて正規直交系 $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ を求める.

```
a ={-2, 1, 2}; b={1, 0, -1}; c={3, 2, 1};
```

```
{u, v, w}=GramSchmidt[{a, b, c}]
```

答 $\left\{ \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$

練習問題 1.5 次の問題を解決するためには Mathematica にどのように入力すればよいか.

- (1) 2点A(1,1,4), B(-3,1,5) の間の距離を求めること.
- (2) 2点A(1,1,4), B(-3,1,5) を結ぶ線分ABについて, 次の各点の座標を求めること.
 - ① 中点 M
 - ② ABを2:1 に内分する点 P
 - ③ ABを2:1 に外分する点 Q
- (3) 2点A(1,1,4), B(-3,1,5)のとき, 隣り合う2つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ が作る平行四辺形の面積と三角形の面積を求めること
- (4) 2点A(1,1,4), B(-3,1,5)のとき, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ を示すこと.
- (5) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ をいろいろ替えて, 次の各々が成り立つ例を求めよ.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

- (6) 次の等式を証明すること.

$$\textcircled{1} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \quad (\text{ヤコビの等式})$$