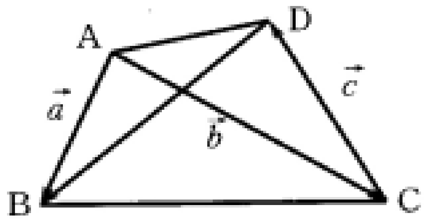
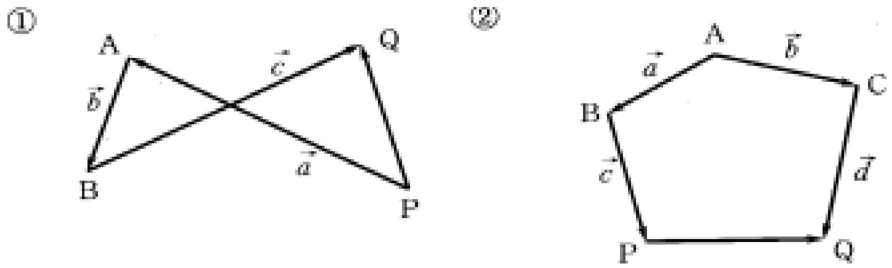
演習問題１

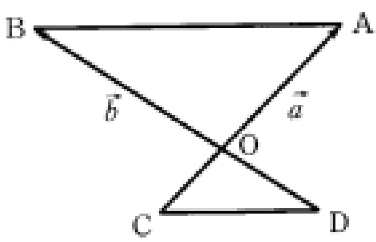
1　次図において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$ とおく．$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.



2　次図において，ベクトル$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表せ.



3　線分ＡＣと線分ＢＤが点Ｏで交わり，ＯＡ＝２ＯＣ，ＯＢ＝２ＯＤであるとする.
このとき，$\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{CD}$ であることを証明せよ.



4　四辺形ＡＢＣＤにおいて，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ であるという．このとき

①　$\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AD}$ として，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表わせ.

②　ＡＤ // BC であることを証明せよ.

5　三角形 ABC について，３辺 BC，CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とし，任意の１点を O とする．次の等式を証明せよ.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$

6　△ABC の重心を G とし，点 A, B, C, G の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{g}$ とするとき，$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であることを証明せよ.

7　△ABC の辺 BC, CA, AB を２：１に内分する点をそれぞれ L, M, N とするとき，△ ABC，△LMN の重心は一致することを証明せよ.

8　△ABC において，辺 AB を１：２に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC を２：１に外分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$　とおく.

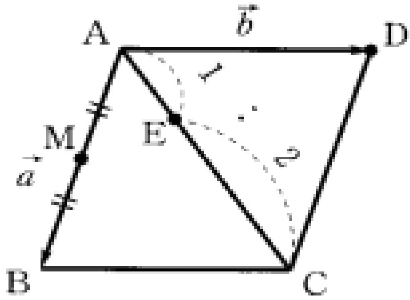
①　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ で表わせ.

②　３点 P，Q，R は一直線上にあることを示せ.

9　平行四辺形ＡＢＣＤの辺ＡＢの中点をＭとする．また，対角線ＡＣ上に点ＥをＣＥ＝２ＡＥであるようにとる.

①　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}, \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ をそれぞれ　$\vec{a},\vec{b}$ で表わせ.

②　点 D，E，M は一直線上にあることを証明せよ.



10　平行四辺形 ABCD において，次の等式を証明せよ.

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\right)$$
（**パップスの定理**）

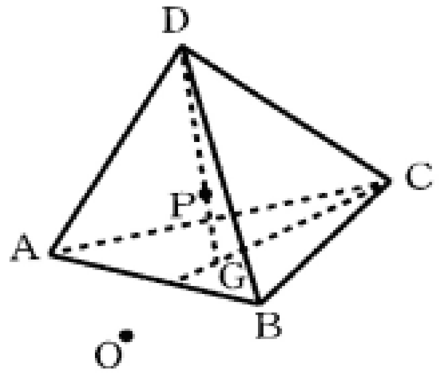
11　四面体 ABCD の辺 AB, CD の中点をそれぞれ E, F とし，辺 BC，DA の中点を

それぞれ M，N とする．四角形 EMFN は平行四辺形であることを証明せよ．

12 四面体 ABCD において，点 A, B, C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする．

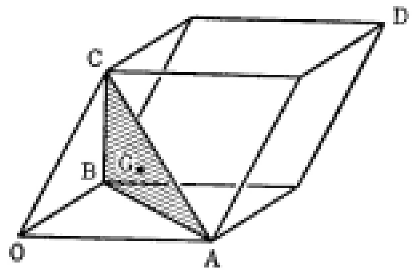
① △ABC の重心 G の位置ベクトルを求めよ．

② 線分 DG を ３：１ に内分する点 P の位置ベクトルを求めよ．



③ 四面体の１つの頂点からこれに向かいあう三角形の重心を結ぶ線分を３：１の比に内分する点は同一であることを説明せよ．

13 下図の平行六面体で，OD は△ABC の重心 G を通ることを証明せよ．



14 △ABC において，辺 AB を１：２に内分する点を M，辺 AC を３：２に内分する点を N，線分 BN，CM の交点を P とする．このとき $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ を使って表せ．

15 相異なる３点 A, B, C が同一直線上にあるための必要十分条件は，

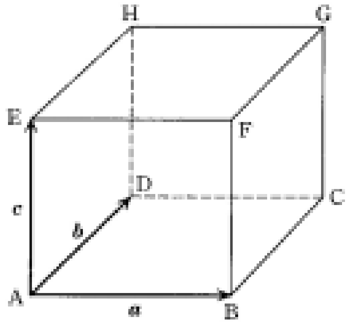
$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0},\quad k+l=1,\quad kl\neq 0$$

となるような実数 k, l が存在することであることを示せ.

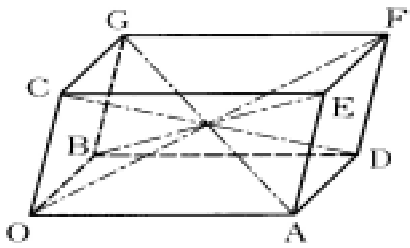
16　一辺の長さが１の立方体において

①　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の交角を求めよ.

②　△AGH の面積を求めよ.



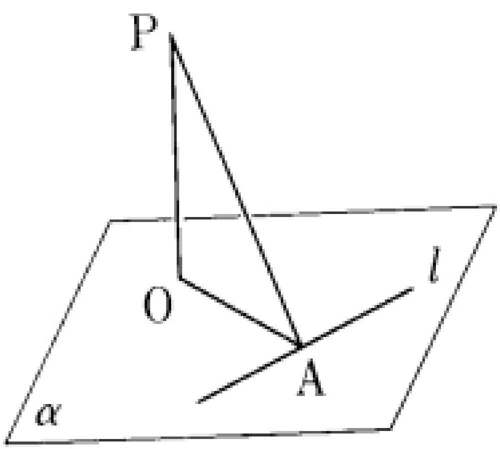
17



平行六面体 OADB-CEFG の４つの対角線 OF, AG, CD，ＢＥは，１点で交わることを示せ.

18　直線 n と平面αが点 O で交わり，n が O を通るα上の交わる２直線と垂直ならば，n は O を通るα上のすべての直線と垂直になることをベクトルを用いて証明せよ.

19



平面α上に直線 l, l 上に点 A がある. また，α上にあって l 上にない点 O, および，α外に点 P がある．次を証明せよ.

①　$\mathrm{PO}\perp\alpha,\ \mathrm{OA}\perp l \Rightarrow \mathrm{PA}\perp l$

②　$\mathrm{PO}\perp\alpha,\ \mathrm{PA}\perp l \Rightarrow \mathrm{OA}\perp l$

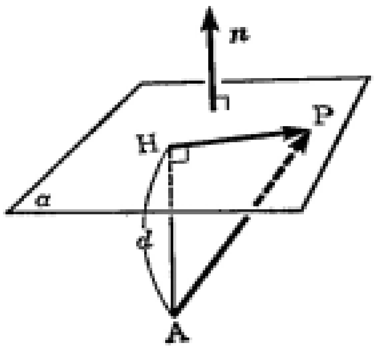
③　$\mathrm{PA}\perp l,\ \mathrm{OA}\perp l,\ \mathrm{PO}\perp \mathrm{OA}$
　　$\Rightarrow \mathrm{PO}\perp\alpha$

（３垂線の定理）

20　点 $\mathrm{A}(x_o, y_0, z_0)$ から平面

$$\alpha : ax + by + cz + k = 0$$

に垂線 AH を下し，ｄ＝AH とする．
平面 α の法ベクトルを $\mathbf{n}$ とする．
α 上の任意の点 P について次を示せ．



①　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$

②　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \dfrac{1}{|\mathbf{n}|}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \mathbf{n}\right|$

③　$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

21　R^3 のベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について、$\mathbf{p}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の一次結合で表わされないが，$\mathbf{p}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の一次結合で表わされることを示せ．

22　R^2 の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合であることを示せ．

23　次のベクトルの組は一次独立か否か調べよ．

①　$\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}$

②　$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

24　次のベクトルの組が一次従属になるように k の値を定めよ．

①　$\begin{pmatrix} 6 \\ 1+k \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ k \end{pmatrix}$

②　$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$

25　$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\7\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\4\\-6\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-5\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-3\\7\\-23\\10\end{pmatrix}$のとき，$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ は一次独立であることを示せ。　また $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ の一次結合で表わせ。

26　ベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ について，つぎの不等式を証明せよ．

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$$　**（シュヴァルツの不等式）**

27　$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ をベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の**距離** distance とよぶ．次を示せ．

①　すべての $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について　$d(\mathbf{a},\mathbf{b})\ge 0$
　　$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{b}$
②　すべての $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について　$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=d(\mathbf{b},\mathbf{a})$
③　すべての $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ について　$d(\mathbf{a},\mathbf{c})\le d(\mathbf{a},\mathbf{b})+d(\mathbf{b},\mathbf{c})$　（三角不等式）

28　$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-2\\7\\0\end{pmatrix}$ のとき，$\mathbf{p}$ が $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ と等距離であるように y, z を定めよ．

29　$\mathbf{0}$ と異なる３つの R^3 のベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ が互いに直交するとき，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は R^3 の基底であることを示せ．

30　$\mathbf{0}$ と異なる３つの R^3 のベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ について，$\mathbf{u}$ が $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ と直交し，$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は１次独立とする．このとき $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は R^3 の基底であることを示せ．

31　$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$　のとき

①　$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のなす角を求めよ．
②　$\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ が互いに直交するように実数 t を定めよ．

32　$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\9\end{pmatrix},\ \mathbf{c}=\begin{pmatrix}4\\-8\\z\end{pmatrix}$ のとき

① $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ であるように，$x,\ y$ の値を定めよ.

② $\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$ であるように，z の値を定めよ.

33　$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\y\end{pmatrix} \middle| \ x,y\in R\right\}$ は $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ によって生成される部分空間であることを示せ.

34　R^3 のベクトル $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ に対して

① $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ で生成される部分空間 V の元であることを示せ.

② $\mathbf{d}$ は V に属さないことを示せ.

35　次の集合の中で，R^3 の部分空間であるものはどれか.

$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ x-2y+3z=0\right\}$　　$V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ x+y+z=1\right\}$

$V_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ x+y=y+z=0\right\}$　　$V_4=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ x^2+y^2+z^2=1\right\}$

$V_5=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ 3x=y\right\}$　　$V_6=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^3 \middle| \ xyz=0\right\}$

36　R^3 で $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ で張られた部分空間を V_1，$\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ で張られた部分空間を V_2 とする.

部分空間　V_1+V_2　と　$V_1\cap V_2$　はどんなベクトルで張られるか.

37　$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\, x+y=w, x+w=y+z\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\middle|\, x+y=z, y=0\right\}$ のとき

①　W_1, W_2 の基底を求めよ.

②　$W_1\cap W_2$　を求めよ.

38　３点 $\mathrm{A}(0,3,0)$, $\mathrm{B}(-1,1,-1)$, $\mathrm{C}(2,3,-6)$ を通る平面を α とするとき,

①　α のベクトル方程式を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　を用いて表わせ.

②　$\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c}$　を正規直交化したベクトル　$\vec{u}, \vec{v}$　を求めよ.

③　α のベクトル方程式を　$\vec{c},\ \vec{u},\ \vec{v}$　を用いて表わせ.

39　３点 $\mathrm{A}(0,1,1)$, $\mathrm{B}(2,0,1)$, $\mathrm{C}(1,2,-1)$ を通る平面を β とするとき

①　β のベクトル方程式を $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　を用いて表わせ.

②　β の法線ベクトル $\vec{n}$ で大きさが１のものを求めよ.

③　β の方程式 $ax+by+cz=d$ を求めよ.

40　３点 $\mathrm{A}(1,1,2)$, $\mathrm{B}(2,-1,1)$, $\mathrm{C}(-1,2,-1)$ について $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　とおく.

①　$\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$　を求めよ.

②　$\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c}$　の定める平行四辺形の面積を求めよ.

③　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$　の定める平行六面体の体積を求めよ.

④　$\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}$ の定める平行六面体の体積を求めよ.