第２章　行列

2.1　行列の四則計算

数を長方形（正方形も含める）に並べ，これにまとまりをつけるため通常丸括弧で括って表したものを**行列** matrix という．例えば

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&1\end{pmatrix}$$

のようである．丸括弧以外に，$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ や $\begin{Vmatrix}a&b\\c&d\end{Vmatrix}$ のような記号が使われることもある．

行列には通常大文字のラベルを付ける．例えば $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ のようにする．行列の横の並びを**行** row といい，上から第１行，第２行, . . . という．また，縦の並びを**列** column といい，左から順に第１列，第２列, . . . という．行の数がｍで列の数がｎのとき，その行列は $m\times n$ 型あるいは (m,n) 型という．上の A は２×３型である．正方形の行列は**正方行列** square matrix といい，その型は $n\times n$ 型であるが，簡単に n 次という．

１つの行または１つの列からなる行列は行ベクトルや列ベクトルと同じである．１次の行列は、実質的に数と同じである．従って，$(a)=a$ と同一視する．

行列を構成する数を**成分** component といい，その数が第 i 行と第 j 列に属するとき，(i, j) 成分という．

行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} のように**２重添え字** double index を使って表わすと便利である．

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

このとき簡単に $A=(a_{ij})$ と表わすことがある．

２つの行列 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ について，両者の型が同じで，対応する成分がすべて同じとき，A と B は**等しい** equal といい $A=B$ と表す．

例えば $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ は同じ型である．$A=B$ となるのは

$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2;\ j=1,2,3)$ が成り立つ場合となる．

型の同じ２つの行列 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ について，その**和** sum $A+B$ を

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

で定める．また行列 $A=(a_{ij})$ の k **倍（スカラー倍** scalar multiple**）** を

$$kA=(ka_{ij})$$

で定める．これらはもとの行列と同じ型の行列である．

すべての成分が 0 である行列を**零行列** zero matrix といい O で表す． 行列 $A=(a_{ij})$ に対して $-A$ を $-A=(-a_{ij})$ で定める．$-A=(-1)A$ である．

型の同じ２つの行列 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ について，$A+(-B)$ を簡単に $A-B$ と書き，A から B を引いた**差** difference という．従って，$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$ となる．

例えば，$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, 3A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}, A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ である．

また，$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=i\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$（$i=\sqrt{-1}$）

> 同じ型の行列 A, B, C について
>
> $$A+B=B+A$$
> $$(A+B)+C=A+(B+C)$$
> $$A+O=O+A=A$$
> $$A+(-A)=(-A)+A=O$$
>
> が成り立つ.

証明　A, B が 2× 3 型行列の場合について交換律： $A+B=B+A$ を示す.

$A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ とおく．　数の交換律より $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)$ であるから $A+B=\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(b_{ij}+a_{ij}\right)=\left(b_{ij}\right)+\left(a_{ij}\right)=B+A$ が成り立つ.（終）

実数を成分とする $m\times n$ 型の行列の全体を, $M^{m\times n}(R)$ で表わすことにする.
$m=1$ や $n=1$ の場合は数ベクトルの集合を表わすので

$$M^{1\times 3}(R)=R_3,\quad M^{3\times 1}(R)=R^3$$

である．また, 3 × 2 型の行列の全体 $M^{3\times 2}(R)$ は行列の加法について加法群をなす.
一般に, $M^{m\times n}(R)$ は行列の加法について加法群をなす．更に

> 同じ型の行列 $A,\ B$ とスカラー $k,\ l$ について
>
> $$k(A+B)=kA+kB$$
> $$(k+l)A=kA+lA$$
> $$(kl)A=k(lA)$$
> $$1A=A$$

であるから, $M^{m\times n}(R)$ は実数をスカラーとするベクトル空間でもある.

$M^{2\times 2}(R)$ の元で次のような特別な形のものを考えよう.

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおく．これらを $M^{2\times 2}(R)$ の**行列単位** matrix unit という.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}$$

であるから, $M^{2\times 2}(R)$ の各元は 4 つの行列単位の 1 次結合で表わされ, $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ は 1 次独立であるから, $M^{2\times 2}(R)$ は 4 次元のベクトル空間と考えられる.

$A=(a_{ij})$ が $m\times n$ 型で，行列 $B=(b_{ij})$ が $n\times p$ 型であるとする．ここで A の列数と B の行数が同じ n である．行列の**積** product AB を次のように定義する．

$$AB=(c_{ij}),\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

すなわち，AB は $m\times p$ 型で，その (i,j) 成分は A の第 i 行と B の第 j の n 個の成分を順にかけたものの和であり，$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ と表すことができる．

例えば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

どんな２つの行列も積が定義できるわけではない．もし AB, BA が共に定義できても，両者が同じ型とは限らない．例えば A を 2×3 型，B を 3×2 型とすると，AB は 2×2 型，BA は 3×3 型である．

$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$AB=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ となる．ここでは $AB=BA$ は満たされていない．

正方行列の積について，$AB=BA$ がなりたつとき，A と B は**可換** commute であるという．

n次行列 $A=(a_{ij})$ の成分で $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を（**主**）**対角成分** diagonal component といい，対角成分以外の成分がすべて 0 であるとき A は**対角行列** diagonal matrix という．対角行列で，対角線成分がすべて 1 である行列を**単位行列** unit matrix, identity matrix といい，I や E で表わす．n 次単位行列は E_n で表わすことがある．

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は２次の単位行列であり，$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は３次の単位行列である．

単位行列 E と数 a に対し，aE という形の正方行列を**スカラー行列**という．２次のスカラー行列は，２次の正方行列と可換である．

ここで，単位行列 I を扱うのに便利な記号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{のとき}) \end{cases}$$　**（クロネッカーのデルタ）**

を用いると，$I = (\delta_{ij})$ と表わされる．

単位行列 I との積について， $AI = A,\quad IA = A$ が成り立つ．

証明　$A = (a_{ik})$ が (m,n) 型で，$I = (\delta_{kj})$ は n 次であるとし，$AI = A$ を示す．

行列の積とクロネッカーのデルタの性質から，AI の (i,j) 成分 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}$ は，$k = j$ を除いて 0 であるから，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$ がなりたつ．（終）

スカラー k と行列 A, B の積について $(kA)B = A(kB) = k(AB)$ 行列の和と積が定義されているとき $A(B+C) = AB + AC$　（左）**分配法則**　(left) distributive law $(A+B)C = AC + BC$　（右）**分配法則**　(right) distributive law が成り立つ．

証明　左分配法則を示す．和と積が定義されるように A を $m \times n$ 型で，B, C を $n \times p$ とし，$A = (a_{ik})$，$B = (b_{kj}), C = (c_{kj})$ とおく．

$$A(B+C) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

$$= AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分} + AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = AB + AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分}$$

これが，すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ とすべての $j = 1, 2, \ldots, p$ について成り立つ．（終）

３つの行列 A, B, C について、型が順に $m \times n$，$n \times p$，$p \times q$ であれば、２組の積 $(AB)C, A(BC)$ が定義されるが、両者は等しい。即ち $(AB)C = A(BC)$　**結合法則**　associative law が成り立つ．

証明　（後に一次変換を使った別証明をする）．　ここでは，m, n, p, q はいずれも１か２か３を想定しているが，任意の自然数でも成り立つ．

各行列の型の設定から，AB の型は $m\times p$，BC の型は $n\times q$ であり，$(AB)C$ と $A(BC)$ は共に同じ型 $m\times q$ である．

$A=(a_{ik}), B=(b_{kl}), C=(c_{lj})$ とおく．まず，AB の (i,l) 成分が $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}$ だから，$(AB)C$ の (i,j) 成分は $u_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}$ である．一方，BC の (k,j) 成分が $\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}$ だから，$A(BC)$ の (i,j) 成分は $v_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right)$ である．ここで $u_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)$，$v_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)$ は np 個の項 $a_{ik}b_{kl}c_{lj}$ を表現するとき，i, j を使わない記号 w_{kl} を用いると，$u_{ij}=\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} w_{kl}\right)$，$v_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} w_{kl}\right)$ である．それらは次図で

$$
\begin{array}{ccccc}
w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1p} & \sum_{l=1}^{p} w_{1l} \\
w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2p} & \sum_{l=1}^{p} w_{2l} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{np} & \sum_{l=1}^{p} w_{nl} \\
\sum_{k=1}^{n} w_{k1} & \sum_{k=1}^{n} w_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} w_{kp} &
\end{array}
$$

縦合計と横合計の総和を表わしていて,加法の順序の違いだけであることがわかり, $u_{ij}=v_{ij}$ である．この式がすべての $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,q$ について成り立つので，$(AB)C=A(BC)$ がなりたつ．（終）

実数を成分とする n 次の行列の全体 $M^{n\times n}(R)$ を $M_n(R)$ とおく．

$M_2(R)$ は，行列の加法について，アーベル群をなし，行列の積について (0) $A,B\in M_2(R)\Rightarrow AB\in M_2(R)$ (1) すべての $A,B,C\in M_2(R)$ について $(AB)C=A(BC)$ (2) $I\in M_2(R)$ はすべての $A\in M_2(R)$ について $AI=IA=A$ を満たす．更に加法と乗法（積）の間に (3) すべての $A,B,C\in M_2(R)$ について $A(B+C)=AB+AC$ すべての $A,B,C\in M_2(R)$ について $(A+B)C=AC+BC$ が成り立つ． 任意の n に対して $M_n(R)$ が同様の条件を満たす．

加法についてアーベル群をなし，更に乗法について (0), (1), (2), (3) を満たすような集合は，その演算で**環** ring をなすという．

既に示したように，$M_2(R)$ において $AB=BA$ とは限らない．$M_2(R)$ は**非可換環** noncommutative ring であるといえる．

ｎ次行列 A について，あるｎ次行列 X が存在して

$$AX=XA=I$$

を満たすとき，A は**正則** regular であるという．A が正則のとき，上の行列 X は只１つである．そこで X を A の**逆行列** inverse matrix といい，A^{-1} で表す．

X が存在するとき只１つであることの証明

A に対して，X が $AX=XA=I$ を，X' が $AX'=X'A=I$ を満たすとする．
このとき，$X=XI=X(AX')=(XA)X'=IX'=X'$ だから $X=X'$ である．（終）

正則という用語は，理解しにくいかも知れない．逆行列があることだから，**可逆行列** invertible matrix という方が馴染むかもしれない．また，環の用語から，**単元** unit といってもよい．

２次の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$ad-bc\neq 0$ のとき，A は正則であり， $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である．$ad-bc=0$ ならば，A は正則ではない．

解説　A^{-1} を定義に従って求めよう．行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $AX=I$ を満たすとすると，

$$AX=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

成分を比較して

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases} \qquad (2)$$

これより

$$\begin{cases} (ad-bc)x=d \\ (ad-bc)z=-c \end{cases}, \quad \begin{cases} (ad-bc)y=-b \\ (ad-bc)w=a \end{cases} \qquad (3)$$

よって $ad-bc\neq 0$ ならば x,y,z,w が定まり $X=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となる．

X をこのように定めると $AX=I$ を満たすが，さらに

$$XA=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

だから，X は A の逆行列である．一方，$ad-bc=0$ ならば，x,y,z,w 存在すれば (3) より，$a=b=c=d=0$ となり (1) の右辺が零行列となるので，A の逆行列は存在しない．

例えば $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$ad-bc=-2$ から，$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である．

> $A,B\in M_2(R)$ が正則ならば
>
> A^{-1} も正則であり，$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
>
> AB も正則であり，$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
>
> である．

証明　A が正則で，その逆行列を $X=A^{-1}$ とする．$XA=AX=E$ が成り立つので，X は正則で，その逆行列は A であるといえる．

$A,\ B$ が正則とし，それらの逆行列を $X=A^{-1},\ Y=B^{-1}$ とする．このとき結合法則から $(AB)(YX)=A(BY)X=AEX=AX=E$，$(YX)(AB)=Y(XA)B=YEB=YB=E$ だから AB は正則で，$YX=B^{-1}A^{-1}$ はその逆行列であるといえる．（終）

行列が正則であるか否かの判定法や，実際の逆行列の求め方は，行列の理論の主要なテーマでもあり，今後いろいろな方法が現われる．

行列の加法や乗法をみると，実数の四則計算との類似点が多々あるが，乗法におけるいくつかの点で大きく異なっている．逆行列の扱い方の他に次を注意すべきである．

$A \neq O, B \neq O$ でも $AB \neq O$ とは限らない．例として，$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ をとると，$AB=O$ が満たされる．このように行列 $A(\neq O)$ で，ある $B(\neq O)$ が存在し，$AB=O$ または $BA=O$ となるとき，A は**零因子** zero divisor であるという．

$AB=AC, A \neq O$ から $B=C$ であるとは限らない．同様に $AC=BC, C \neq O$ から $A=B$ であるとは限らない．即ち，一般には左または右からの**簡約** cancellation ができない．

練習問題 2.1

(1)　次の行列の積を計算せよ．

①　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

②　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

③　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(2)　行列 A,B,C を $A=(2 \quad 8 \quad 4)$，$B=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。次の計算をせよ。ただし、定義されないものについてはその旨答えよ．

$AB \qquad AC \qquad BC \qquad CC \qquad BA \qquad CA \qquad CB$

(3)　①　$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$AB=O,\ BA \neq O$ であることを確かめよ．

②　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$AB=AC,\ A \neq O$ だが $B \neq C$ であることを確かめよ．

③　$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$AX=E,\ XA=E$ であることを確かめよ．

(4)　①　次の行列は正則であるか．正則のときはその逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$$

② $A=\begin{pmatrix}5&2\\10&a\end{pmatrix}$ が正則であるための条件を求め，逆行列を求めよ.

(5)　① $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\-5&5&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}7&4&2\\3&2&1\\10&5&3\end{pmatrix}$ のとき，$AX=E,\ XA=E$ であることを確かめよ.

② $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&3&1\end{pmatrix}$ とする．A の逆行列は B であることを示せ.

③ $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ は $abc\neq 0$ ならば正則で $A^{-1}=\begin{pmatrix}a^{-1}&0&0\\0&b^{-1}&0\\0&0&c^{-1}\end{pmatrix}$ を示せ.

(6)　$A=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix}$ のとき，次の行列を求めよ.

$(AB)^{-1}$,　$B^{-1}A^{-1}$,　$A^{-1}B^{-1}$

(7)　①　2次行列 $\begin{pmatrix}5&0\\-4&2\end{pmatrix}$ を3つの行列 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&1\\-1&-2\end{pmatrix}$ の1次結合で表わせ. また $\begin{pmatrix}5&0\\-4&22\end{pmatrix}$ はこれら3つの行列の1次結合で表わせないことを示せ.

②　次の行列の組は1次独立であるか否か調べよ.

$$\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3&5\\8&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$$

③　次の行列の組が1次従属になるように k の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix}2&-5\\3&k\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-7\\5&10\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&-2\\3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&1\\4&-13\end{pmatrix}$$

(8) 次を示せ.

① A,B が2次行列で，AB が正則ならば，A,B はともに正則である.

② A が2次行列で，$A^3=E$ ならば，A は正則である.

③ A が2次行列で，$A^3=O$ ならば，A は正則ではないが，$E-A, E+A$ は共に正則である.

④ A が2次行列で，$A^2-A+E=O$ ならば，A は正則である.