2.2　ガウスの消去法 Gaussian elimination

連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

は行列を使って表現できる．即ち，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおくと簡単に

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \qquad (2)$$

となる．A を**係数行列** coefficient matrix，$\mathbf{x}$ を**未知数ベクトル**，$\mathbf{b}$ を**定数項ベクトル**と呼ぶ．（１）を解くことは，（２）では，ベクトル $\mathbf{x}$ を求めることに相当する．

一般には，連立１次方程式は

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

の形であり，同様に行列を用いて表現できる．

今後は，連立１次方程式が解を持つ条件を調べることや，解があるとき，それらをすべて求める方法を議論することが目的となる．方程式の数や未知数の数が大きくなると，いかに能率よく，誤差を小さく解くかということも問題になってくる．

正方行列の対角成分の下の部分の成分がすべて 0 であるような行列を，**上三角行列** upper triangular matrix という．一方，対角成分の上の成分がすべて 0 であるような行列を，**下三角行列** lower triangular matrix という．

ここでは，（１）が一組の解 x, y, z をもつとき，係数行列を消去法と呼ばれる操作で，対角行列に変形して求める方法を述べる．実は，この方法は（１）に解が無い場合はそのことを知らせてくれるし，解が無数にある場合はそれらをすべて求める方法でもあり，一般の連立１次方程式を解く場合にも通用する極めて有効な方法である．

　連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad \text{（A）}$$

に対して，次の３つの**基本操作** elementary operation を行う.

(1)　１つの方程式に 0 でない数をかける.
(2)　１つの方程式にある数をかけたものを他の方程式に加える.
(3)　２つの方程式を入れ換える.

適当に基本操作を繰り返した結果として,（A）と同値な連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}'x+a_{12}'y+a_{13}'z=b_1' \\ \qquad a_{22}'y+a_{23}'z=b_2' \\ \qquad\qquad a_{33}'z=b_3' \end{cases} \qquad \text{（B）}$$

に至ることができる.

（A）の連立１次方程式で，未知数 x, y, z や＝などを取り去った次の２つの行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{（C）}$$

は一方は係数行列であるが，もう一方は**拡大係数行列** extended coefficient matrix という．先の基本操作は、拡大係数行列では

　次の３つの**行基本変形** row elementary operation

①　１つの行に０でない数をかける.
②　１つの行にある数をかけたものを他の行に加える.
③　２つの行を入れ換える.

に相当する．その結果として係数行列の部分が上三角行列である

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & \vdots & b_1' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \vdots & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}' & \vdots & b_3' \end{pmatrix} \qquad \text{（D）}$$

に至る．ここまでの操作を**前進消去** forward elimination という．更に行基本変形を施して，係数行列を対角行列にする.

$$\begin{pmatrix} a_{11}'' & 0 & 0 & \vdots & b_1'' \\ 0 & a_{22}'' & 0 & \vdots & b_2'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \vdots & b_3'' \end{pmatrix} \qquad \text{（E）}$$

この操作を**後退代入** back substitution という．これは連立１次方程式（B）が

$$\begin{cases} a_{11}''x \qquad\qquad = b_1'' \\ \qquad a_{22}''y \qquad = b_2'' \\ \qquad\qquad a_{33}''z = b_3'' \end{cases} \qquad \text{（F）}$$

と変形されたことである．これより x, y, z が求められる.

計算例１　次の連立１次方程式を消去法で解く．拡大係数行列の変形も示す.

$$\begin{cases} 3x+y-7z=0 & (1) \\ 4x-y-z=5 & (2) \\ x-y+2z=2 & (3) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \\ 4 & -1 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

(1) と (3) を入れ替える。

$$\begin{cases} x-y+2z=2 & (3) \\ 4x-y-z=5 & (2) \\ 3x+y-7z=0 & (1) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & -1 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

(3)×(-4) を (2) に加え、(3)×(-3) を (1) に加える.

$$\begin{cases} x-y+2z=2 & (3) \\ 3y-9z=-3 & (4) \\ 4y-13z=-6 & (5) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 3 & -9 & \vdots & -3 \\ 0 & 4 & -13 & \vdots & -6 \end{pmatrix}$$

(4)×$\left(-\dfrac{4}{3}\right)$を(5)に加え, (4)×$\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を行う.

$$\begin{cases} x-y+2z=2 & (3) \\ y-3z=-1 & (6) \\ -z=-2 & (7) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

ここで、下の式から上の式へ向かって基本変形をする.

(7)×(-3) を (6) に加え、(7)×2 を (3) に加え、(7)×(-1) を行う.

$$\begin{cases} x-y=-2 & (8) \\ y=5 & (9) \\ z=2 & (10) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

(9) を (8) に加える.

$$\begin{cases} x=3 & (11) \\ y=5 & (9) \\ z=2 & (10) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

計算例２　次の２組の連立１次方程式を解く．拡大係数行列の基本変形で示す.

$$\begin{cases} x+3z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ x+3y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3z=1 \\ 2x+3y+4z=3 \\ x+3y+z=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

連立１次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x \qquad +3z=1 \\ \quad 3y-2z=1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \qquad +3z=1 \\ \quad 3y-2z=1 \\ 0x+0y+0z=1 \end{cases}$$

$z=t$　（t は任意定数）とおくと

$x=-3t+1,\ y=\dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3}$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} -3t+1 \\ \dfrac{2}{3}t+\dfrac{1}{3} \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ \dfrac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$（t は任意定数）

解があるとすると，最後の式に矛盾する．　従って解はない．

連立１次方程式を消去法で解く方法を，逆行列を求める方法に応用できる．

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ が $AX=I$ を満たすとき，両辺の成分表示を第１列，第２列，第３列 で括ると

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}=1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}=0 \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}=0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}=1 \\ a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_{13}+a_{12}x_{23}+a_{13}x_{33}=0 \\ a_{21}x_{13}+a_{22}x_{23}+a_{23}x_{33}=0 \\ a_{31}x_{13}+a_{32}x_{23}+a_{33}x_{33}=1 \end{cases}$$

となる．係数行列はいずれも A であり，未知数ベクトルは X の各列であり，定数項ベクトルは，３次の単位ベクトル I の各列である．従って，３組の連立一次方程式をまとめて消去法で解くことができる．即ち，A と I を並べた３×６型の行列

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

において，行基本変形によって

$$(I\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&1&0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&0&1&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{array}\right)$$

と変形できれば、$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$ が求める $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ である．

このようにして，$AX=I$ を満たす $X=B$ が求まる．

$(A|I)$ から行基本変形により $(I\,|\,B)$ に変形できないときは，$AX=I$ を満たす $X=B$ が存在しない場合である．

ところで，$(A|I)$ から行基本変形により $(I\,|\,B)$ に至った変形を逆順にたどれば，$(I\,|\,B)$ の左右の行列を入れ替えた行列

$$(B\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}b_{11}&b_{12}&b_{13}&1&0&0\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&0&1&0\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&0&0&1\end{array}\right)$$

から，$(A|I)$ の左右の行列を入れ替えた行列 $(I\,|\,A)$ に至るはずである．従って $AB=I$ ならば，$BA=I$ でもある．

この議論は３次行列に限らず，任意の次数の正方行列でもなりたつ．

正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $AB=I$ を満たす行列 B が存在することである．

証明　A を n 次行列とする．A が正則であれば，$B=A^{-1}$ とおけばよい．逆に $AB=I$ を満たす行列 B が存在するならば，積が定義されるのだから B も n 次行列である．３次行列のときの議論の繰り返しで $AB=I$ から $BA=I$ がいえるので，A は正則である．（終）

計算例３　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求める.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ ２行＋１行×(-1)、３行＋１行×5

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ ２行×$\frac{1}{3}$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ ３行＋２行×5

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$ ３行×3

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right)$$ ２行＋３行×$\frac{1}{3}$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right)$$ １行+２行×2

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

従って $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ である.

練習問題 2.2　次の（連立）１次方程式を解け。

(1)　①　$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-3y=1 \end{cases}$　②　$\begin{cases} 3x+7y=41 \\ 2x-5y=-21 \end{cases}$

③　$\begin{cases} 11x+12y=31 \\ 21x+22y=32 \end{cases}$　④　$\begin{cases} 11x+12y=31 \\ 22x+24y=62 \end{cases}$

(2)　①　$2x+y=3$　②　$2x-3y+z=0$

③　$-x+5y+z-2w=-3$　④　$x+2y+3z-4w-5u-6v=-3$

(3)　①　$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ -x+5y+3z=-3 \end{cases}$　②　$\begin{cases} 2x-3y+z+5w=-1 \\ -x+5y+z-2w=-3 \end{cases}$

③　$\begin{cases} x+y+u+v+w=0 \\ x+2y+3u+4v+5w=0 \end{cases}$　④　$\begin{cases} x+y+u+v+w=1 \\ x+2y+3u+4v+5w=2 \end{cases}$

(4)　①　$\begin{cases} 2x+3y+z-2w=2 \\ -x \quad +2z+4w=0 \\ 3x+y-5z+2w=0 \end{cases}$　②　$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+4y+8z=0 \\ 2x+2y+z=3 \end{cases}$

③　$\begin{cases} x+5y+2z=7 \\ -x+4y+z=5 \\ 5x+y+3z=-2 \end{cases}$　④　$\begin{cases} 3x+y-7z=0 \\ 4x-y-z=5 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$

(5)　①　$\begin{cases} 2x+3y-5z=3 \\ x-y+z=0 \\ 3x-6y+2z=-7 \end{cases}$　②　$\begin{cases} 11x+12y+13z=1 \\ 21x+22y+23z=2 \\ 31x+32y+33z=3 \end{cases}$

③　$\begin{cases} x+2y-8z=3 \\ -2x+3y-5z=1 \\ -x-y+5z=-2 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$　④　$\begin{cases} 3x+y+z+u=1 \\ x+y+2z+u=0 \\ z-3u=2 \\ 2z+u=1 \end{cases}$

(6)　①　$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$　$(a,b,c$ は異なる）

②　$\begin{cases} ax+by+cz=a \\ bx+cy+az=b \\ cx+ay+bz=c \end{cases}$　$(a+b+c\neq 0,\ a,b,c$ は異なる）

（7）次の３つの型の行列を $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{pmatrix}$ に，左から掛けることは，

B の行基本変形を引き起こし，連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$ に対する

３種類の基本変形に対応することを確認せよ．

①　$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

②　$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$

③　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$