2.3 べき乗・対称行列・直交行列

正方行列 A の**べき乗** power $A^n (n \geq 0)$ は，次のように定義できる．

$$\begin{cases} A^0 = E, \quad A^1 = A \\ A^{n+1} = AA^n \ (n \geq 1) \end{cases}$$

この定義から $A^{n+1} = A^n A \ (n \geq 1)$ でもあることが n に関する数学的帰納法で示せる．

正方行列 A について
$$A^{m+n} = A^m A^n \ (m \geq 0, n \geq 0)$$ **指数法則** exponent law
が成り立つ．

特に，A が正則行列のときは，$\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1} \ (n \geq 0)$ である．

指数法則は結合律を使って，数学的帰納法で証明できる．

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して次の等式が成り立つ．（**ケイリー・ハミルトンの定理**）
$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

この式を利用して行列のべき乗が簡単に計算できる場合がある．

任意の正方行列 A に対して，ある多項式 $f(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ が存在して，$f(A) = A^m + b_1 A^{m-1} + b_2 A^{m-2} + \cdots + b_{m-1}A + b_m E = O$ となることが知られている．

行列 A 対して，多項式 $f(x)$ の中で $f(A) = O$ となる次数が最小なもの（**最小多項式** minimal polynomial）を求めることも重要なテーマである．A が n 次行列のとき，最小多項式の次数は n 以下であることが知られている．

このような多項式を求める理論がある．また，$A^m = c_1 A^{m-1} + c_2 A^{m-2} + \cdots + c_{m-1}A + c_m E$ とおいて，計算により $c_1, c_2, \cdots, c_m$ を求めてもよい．

行列の平方根の概念は定義できるが，常に存在するとは限らない．存在しても１つとは限らないことは勿論である．例えば，$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ をみたす行列 X は４つ存在する．

指数関数 e^x のマクローリン展開を利用して，正方行列 A の**指数行列** exponential matrix を

$$Exp(A) = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定義できる．　この無限級数は常に収束することが証明できる．（微積分が必要）

$m \times n$ 型行列 $A = (a_{ij})$ に対して，(i, j) 成分が a_{ji} であるような $n \times m$ 型の行列を ${}^tA$ で表し，A の**転置行列** transposed matrix という．

すなわち，転置行列を $B = (b_{ij})$ とおくと，$b_{ij} = a_{ji}$ となる．簡単にいえば ${}^tA$ は A の行と列を入れ替えて得られる．

例えば，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ のとき ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ である．

転置行列について次が成り立つ． ${}^t({}^tA) = A$ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ ${}^t(kA) = k\,{}^tA$ ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

証明　　第４の式を示す．$A = (a_{ik})$ が $m \times n$ 型で，$B = (b_{kj})$ が $n \times p$ 型の行列とする．

AB は $m \times p$ 型であるから，${}^t(AB)$ は $p \times m$ 型である．その (j, i) 成分は，AB の (i, j) 成分であるから，$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ である．一方，${}^tB$ は $p \times n$ 型で ${}^tA$ は $n \times m$ 型より ${}^tB\,{}^tA$ は $p \times m$ 型である．その (j, i) 成分は，$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \left({}^tB\text{の}(\mathrm{j},\mathrm{k})\text{成分}\right)\left({}^tA\text{の}(\mathrm{k},\mathrm{i})\text{成分}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik}$ である．（終）

正方行列 A について，${}^tA = A$ が成り立つとき，A を**対称行列** symmetric matrix という．また ${}^tA = -A$ が成り立つとき，A を**交代行列** alternate matrix または **歪対称行列** skew symmetric matrix という．

正方行列 $A = (a_{ij})$ について

A が対称行列 $\Leftrightarrow$ すべての i, j について $a_{ij} = a_{ji}$

A が交代行列 $\Leftrightarrow$ すべての i, j について $a_{ij} = -a_{ji}$

例えば，$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ は対称行列であり，　$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ は交代行列である．

任意の正方行列は対称行列と交代行列の和として一意的に表わされる．

証明 正方行列 A に対して， $A=B+C$ （B は対称行列，C は交代行列）と表せたとしよう． ${}^tB=B, {}^tC=-C$ から ${}^tA={}^tB+{}^tC=B-C$ である． 従って，

$$B=\frac{1}{2}\left(A+{}^tA\right),\quad C=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$$

となる． 一意性を示すため，A が２通りに表せたとしよう：

$A=B+C$ （B は対称行列，C は交代行列）

$A=B'+C'$ （B' は対称行列，C' は交代行列）

上の計算から $B'=\frac{1}{2}\left(A+{}^tA\right)$，$C'=\frac{1}{2}\left(A-{}^tA\right)$ でもあるので $B=B', C=C'$ である（終）

正方行列 A について、${}^tA=A^{-1}$ が成り立つとき，A を**直交行列** orthogonal matrix という。正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ が直交行列である条件は $A\,{}^tA={}^tA\,A=I$ であるが，正則行列の性質から $A\,{}^tA=I$ または ${}^tA\,A=I$ でよい． 従って２次行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のときは $A\,{}^tA=I$ から

$$\begin{cases} a_{11}{}^2+a_{12}{}^2=1 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0 \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}=0 & a_{21}{}^2+a_{22}{}^2=1 \end{cases}$$

であり， これは A の２つの行ベクトルの大きさが１で，２つの行が直交していることである．同様に ${}^tA\,A=I$ の成分表示から得られる式から，A が直交行列であるもう１つの条件は A の２つの列ベクトルの大きさが１で、２つの列が直交していることであると分かる．

例えば $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ は直交行列である．

また，$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ や $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ も直交行列である．

$A,B\in M_2(R)$ が直交行列ならば AB，${}^tA$，A^{-1} は直交行列である．

証明 仮定より $A\,{}^tA={}^tA\,A=I$， $B\,{}^tB={}^tB\,B=I$ である．

$(AB)\,{}^t(AB)=(AB)({}^tB\,{}^tA)=A(B\,{}^tB){}^tA=AI\,{}^tA=A\,{}^tA=I$ より AB は直交行列である．

また $A^{-1}={}^tA$ より ${}^t(A^{-1})={}^t({}^tA)=A$ だから $A^{-1}\,{}^t(A^{-1})=A^{-1}A=I$ となり，A^{-1} は直交行列である．（終）

練習問題 2.3

(1)　正方行列 A について指数法則 $A^{m+n} = A^m A^n$ $(m \geq 0, n \geq 0)$ を証明せよ.

(2)　２次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ を示せ.

(3)　①　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A^2，A^3，A^4 を求めよ.

②　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，A^5，A^{10} を求めよ.

(4)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 12$ とおくと，$f(A) = O$ を示せ.

(5)　$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 3 & -7 & 6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，E, A, A^2 は１次独立であるか.

(6)　$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の最小多項式を求めよ.

(7)　次を示せ．行列の次数は３とする.

①　A, B が対称行列ならば，$A + B, AB + BA$ も対称行列である.

②　A, B が対称行列ならば，AB が対称行列 $\Leftrightarrow AB = BA$ である.

③　A が対称行列でかつ正則行列ならば A^{-1} も対称行列である.

④　A が正則行列ならば，${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$ である.

⑤　A が対称行列ならば，任意の行列 P に対して ${}^tPAP$ も対称行列である.

⑥　A が対称行列ならば，$C = a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \cdots + a_k E$ も対称行列である.

次の行列が直交行列であるように成分を決定せよ.

①　$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & y \end{pmatrix}$　　②　$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ x & y \end{pmatrix}$　　③　$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x \\ y & z & u \end{pmatrix}$