演習問題 2

1　①　$A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -4 & 8\end{pmatrix}$のとき $AB,\ BA$ を求めよ．

②　$A,\ B$ を $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ x & y\end{pmatrix}$ なる行列とするとき，$AB=BA$ となる $x,\ y$ を求めよ．

③　$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$のとき，$A^2-B^2$，$(A+B)(A-B)$ を計算せよ．

2　①　２次の行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ で，すべての行列 X と可換なものを求めよ．

②　３次の行列 $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ で，すべての行列 X と可換なものを求めよ．

3　行列 A,B,C を２次行列とするとき，$(AB)C=A(BC)$ がなりたつことを示せ．

4　結合の数を数える次の方法を行うこと．

①　４個の行列 A,B,C,D の積 $ABCD$ の結合の方法は次のように

$$((AB)C)D,\ (A(BC))D,\ (AB)(CD),\ A((BC)D),\ A(B(CD))$$

の５通りある．これらはすべて等しいことを示せ．

②　５個の行列 A,B,C,D,E の積 $ABCDE$ の結合の方法は何通りあるか．

③　n 個の行列の積の結合の数を $c(n)$ とする．$c(1)=1,\ c(2)=1,\ c(3)=2$ である．

$$c(n)=c(1)c(n-1)+c(2)c(n-2)+\ldots+c(n-1)c(1)$$ を示せ．

④　$c(n)$ の母関数 $y=c(1)x+c(2)x^2+c(3)x^3+\ldots+c(n)x^n+\ldots$ を用いて，y^2 を計算すると，$y^2-y+x=0$ をえる．$y=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$ であるが，$x=0$ のとき $y=0$ であるから，プラス・マイナスはマイナスである．$\sqrt{1-4x}$ のマクローリン展開から $c(n)=\dfrac{1}{n}\,{}_{2n-2}C_{n-1}$ であることを導け．

5　①　行列 A,B,C を２次行列とするとき

$AB=I$，$CA=I$ ならば $B=C$

であることを示せ．ここで I は単位行列とする．

②　３次の行列 A に対し，$AB = E_3,\ CA = E_3$ が成り立つような３次行列 $B,\ C$ が存在するとき，A は正則で $A^{-1} = B = C$ であることを示せ．ただし，E_3 は３次の単位行列である．

6　行列 A, B, C, D を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の計算をせよ．ただし，定義されないものについてはその旨答えよ．
ここで ${}^tA$ は A の転置行列を表わす．

AB　　BA　　CB　　${}^tA\,{}^tB$　　$B\,{}^tD$

7　行列 A は３×２型で，行列 B は２×３型であるとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ であることを示せ．

8　①　$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき ${}^t(AB) \neq {}^tA\,{}^tB$ であることを確かめよ．

②　３次の行列 $A,\ B$ で ${}^t(AB) \neq {}^tA\,{}^tB$ となる例を作れ．

9　行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とするとき、次を求めよ．

${}^tBAB$　　$B\,{}^tB$　　$({}^tBAB)^n$　　A^n

10　次の各行列を対称行列と交代行列の和で表せ．

①　$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$,　　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

11 ① $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$のとき，$A^2=O$となるための条件を求めよ．

② $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$を満たす行列$X$を求めよ．

12 ① 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，xの２次式 $f(x)=x^2+px+q$で

$f(A)=A^2+pA+qE=O$ を満たすものを求めよ．

② 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において $a+d=-1,\ ad-bc=1$ であるとき，次を示せ．

$A^2+A+E=O$, $A^3=E$

③ 行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，A^3, A^5, A^{10} をそれぞれ求めよ．

④ $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と単位行列 E に対して，$A=E+\sqrt{3}J,\ B=\sqrt{3}E-J$ とおく．

AB，A^3，B^6 を計算せよ．

⑤ 行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について，$A, A-E, A+E$のうち少なくとも１つは正則で

であることを示せ・

⑥ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $A^3=O$ が成り立つとき，Aは正則でなく，

$A^2=(a+d)A$ と $A^2=O$ を満たすことを示せ．

13 $A=\begin{pmatrix} x & -3 \\ 6 & y \end{pmatrix}$ が$A^2-A-2E=O$ を満たすとき，

① x, yを求めよ．ただし，$x>y$とする．

② 行列 $A-2E,\ A+E$ は零因子であることを示せ．

③ $A^3=pA+qE$ を満たす実数p, qを求めよ．

④ A^4, A^5, A^6 を求めよ．

14　$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，次を示せ.

①　$A^2-4A+3E=O$

②　$A^n=a_nA-b_nE$　とおくと，$a_{n+1}=3a_n+1,\ b_{n+1}=a_{n+1}-1=3a_n$

15　①　２次行列 X は(1,1)成分が a で第１行の成分の和は 0 であり，$X^2=E$ を満たすとする．また，２次行列 Y は(1,1)成分が a で第１行の成分の和は 0 であり，$Y^2=-E$ を満たすとする．ただし行列の成分は実数とし，E は単位行列とする．

X, Y をすべて求めよ．また自然数 n について X^n+Y^n を求めよ．

②　２次行列 X は(1,1)成分が a で第１行の成分の和は 1 であり，$X^2=E$ を満たすとする．また，２次行列 Y は(1,1)成分が a で第１行の成分の和は 1 であり，$Y^2=-E$ を満たすとする．ただし行列の成分は実数とし，E は単位行列とする．

X, Y をすべて求めよ．また，$a\neq 1$ のとき，自然数 n について $(X+Y)^n$, X^n+Y^n を求めよ．

16　次の（連立）１次方程式を解け。

①　$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3-5x_4=-2 \\ x_2+3x_3=3 \\ x_1+3x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+4x_2+x_4=-5 \end{cases}$　　$\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3-7x_4=3 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2-4x_3-5x_4=8 \end{cases}$

②　$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+5x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_2+3x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \end{cases}$　　$\begin{cases} -x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \\ 5x_2-5x_3+4x_4=-3 \\ x_1+2x_2+3x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+5x_3+2x_4=1 \end{cases}$

③　$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+8x_5=1 \\ 3x_1-x_2-5x_3+2x_4+x_5=7 \\ x_1+3x_2+5x_3+x_4+10x_5=3 \\ x_2+2x_3-x_4+4x_5=-2 \end{cases}$　　$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=1 \\ 2x_1+4x_2+x_3+3x_4-3x_5=2 \\ -x_1-2x_2+2x_3-4x_4-x_5=1 \\ 3x_1+6x_2+6x_4-5x_5=3 \end{cases}$

17 行列 $A=\begin{pmatrix}1&3&1&3\\3&1&0&1\\1&-1&1&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&7&-4\\1&-1&5&-1\\-2&2&-9&5\\1&-1&8&8\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-6\\-1\\4\\5\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}4\\5\\-6\\-1\end{pmatrix}$

のとき、連立1次方程式 $Ax=b,\ Ax=c,\ Bx=b,\ Bx=c$ を解け。

18 次の行列の逆行列を求めよ.

① $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1&-2\\3&5\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}6&7\\8&9\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&3&-4\\3&2&-4\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\-5&5&2\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&-1\\3&5&1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\-3&-4&-4\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-2&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&-1\\0&0&-1&2&0\\0&0&-1&0&2\end{pmatrix}$

19 ① $A=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}$のとき

$AX=B$ を満たす列ベクトル X を求めよ.

$YA=C$ を満たす行ベクトル Y を求めよ.

②　$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$のとき

$AX=B$を満たす行列Xを求めよ.

$YA=B$を満たす行列Yを求めよ.

③　次の等式が成り立つような行列X,Yを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

④　$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$を満たす行列$A$を求めよ.

20　①　3×3行列Aから4×4正方行列Bが$B=\begin{pmatrix} & & & 4 \\ & A & & 8 \\ & & & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$のように作られている．$B$の逆行列が$B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & x \\ 1 & 0 & 4 & y \\ 5 & 2 & 6 & z \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$であるとき，$A$の逆行列を求め，さらに x,y,z の値を求めよ.

②　行列 $T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

③　行列 $U=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \\ -4 & 5 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないことを示せ.

21　①　$P=\begin{pmatrix} d & -c & b & a \\ c & d & -a & b \\ -b & a & d & c \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}(a^2+b^2+c^2+d^2=1)$ は直交行列であることを示せ.

②　$U=\dfrac{1}{\sqrt{4}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^{\,2} & \omega_1^{\,3} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^{\,2} & \omega_2^{\,3} \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^{\,2} & \omega_3^{\,3} \end{pmatrix}(\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{2k\pi}{4})$ はユニタリ行列であることを示せ.

22　A,B を２次の正方行列とし，$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ とする．次を示せ.

①　C が直交行列である $\Leftrightarrow$ A,B が直交行列である.

②　C がユニタリ行列である $\Leftrightarrow$ A,B がユニタリ行列である.

23　A,B を２次の直交行列とする．次を示せ.

$A+iB$ がユニタリ行列である $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列である.

24　$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，次の等式を確かめよ.

$J^2=K^2=-L^2=E.\quad LJ=-JL=K,\quad KJ=-JK=L,\quad KL=-LK=J$

ただし，E は２次の単位行列である.

25　a,b,c,d を任意の実数とし，$a+bi+cj+dk$ のような記号を考え，これを**四元数** quaternion と呼ぶ．四元数の全体を H で表わす．四元数の間の加法・乗法は $i,\ j,\ k$ を実数の場合の文字のように計算し，

$i^2=j^2=k^2=-1,$

$ij=k,\ ji=-k$

$jk=i,\ kj=-i$

$ki=j,\ ik=-j$

とする．従って　$\alpha=a+bi+cj+dk,\ \beta=a'+b'i+c'j+d'k$　のとき

$\alpha+\beta=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$

$\alpha\beta=(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+a'b+cd'-c'd)i$

$\quad+(ac'+a'c-bd'+b'd)j+(ad'+a'd+bc'-b'c)k$

$\alpha \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

である．さて，

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$　（但し $i = \sqrt{-1}$ とする）

とおくとき，次を示せ．

① $\begin{cases} I^2 = J^2 = K^2 = -E \\ IJ = K,\ JI = -K \\ JK = I,\ KJ = -I \\ KI = J,\ IK = -J \end{cases}$

② 四元数 $\alpha = a + bi + cj + dk$ に行列 $A = aE + bI + cJ + dK$ を対応させる．この対応を f とするとき，次を示せ．

$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

$f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

③ 四元数 $\alpha = a + bi + cj + dk$ に行列 $\begin{pmatrix} a & c & b & -d \\ -c & a & d & b \\ -b & -d & a & -c \\ d & -b & c & a \end{pmatrix}$ を対応させる．この対応を g とするとき，次を示せ．

$g(\alpha + \beta) = g(\alpha) + g(\beta)$

$g(\alpha\beta) = g(\alpha) g(\beta)$