

第3章 行列式

3.1 行列式の定義

連立1次方程式や、行列の計算で用いられる行列式を定義する.

2次の正方行列を係数とする連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (2) \end{cases}$$

を解くため、(1)× a_{22} −(2)× a_{12} より

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (3)$$

また、(1)×(− a_{21}) + (2)× a_{11} より

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (4)$$

従って

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

ならば、(1), (2) の解は、(3), (4) より

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

として求まる.

同様に、3次の正方行列を係数とする連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & (5) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & (6) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & (7) \end{cases}$$

を解くため、まず z を消去するため(5)× a_{23} −(6)× a_{13} 、(6)× a_{33} −(7)× a_{23} を考えると

$$(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})y = a_{23}b_1 - a_{13}b_2$$

$$(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})x + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})y = a_{33}b_2 - a_{23}b_3$$

ここで、上の2元連立1次方程式の解を与える式に代入すると、 x, y の共通の分母は

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{23}\{a_{11} \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21} \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\} \end{aligned}$$

であり、 x の分子は

$$\begin{aligned} & (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})(a_{23}b_1 - a_{13}b_2) - (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})(a_{33}b_2 - a_{23}b_3) \\ &= a_{23}\{b_1 \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2 \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3 \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\} \end{aligned}$$

である.

従って、 $a_{11} \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21} \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \neq 0$ ならば

$$x = \frac{b_1 \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2 \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3 \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11} \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21} \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}$$

と求まる. y と z についても同様である.

この結果から, (5), (6), (7) の3式から y, z の係数を同時に消去するには

$$(5) \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - (6) \times (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + (7) \times (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

を考えればよいことになる.

これらの式に繰り返し現れる式を記述するために**行列式** determinant の記号を次のように定義する.

2 次の行列式

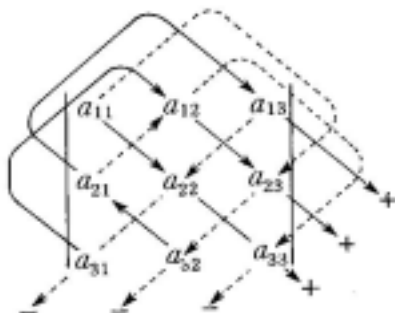
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 次の行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \times (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} \times (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} \times (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

行列式の値を求める式を, その行列式を**展開する** expand という. 行列式を展開する方法は多数ある. それは小行列式のとき述べる. 上の3次の行列式で, その右辺の最初の式は, **第1列で展開した式**と呼ばれる. また, 最後の式は, 各行各列から1つずつ成分を取り出し, それらの積にプラス1かマイナス1が付いている.

3次の行列式の展開式で, 項とその符号を覚える**サラスの方法**がある.



さて、行列式の記号を用いると、2元や3元の場合の連立1次方程式の解は次のように見事に表現できる。

クラメルの公式

2元連立1次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (\text{分母} \neq 0 \text{ とする})$$

3元連立1次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ の解は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (\text{分母} \neq 0 \text{ とする})$$

で与えられる。

しかし、この式を用いて計算することは計算量から、あまり便利とはいえない。ガウスの消去法を用いる方がよい。

行列式を表す記号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ や $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は行列のそれと類似している。それゆ

え、行列のときと同じ用語を使って、行列式の**次数**、**行**、**列**、**成分**などを用いる。しかし、長方形の行列式は考えない。行列には値がないが、行列式はその値がある。

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ または $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、その行列式を $|A|$ で表す。

あるいは、 $\det(A)$ と表す。 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ は簡単に $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ と書く。

一般の n 次行列式を定義するには準備が必要である.

n 個の自然数 $\{1, 2, \dots, n\}$ を重複せず一列に並べたものを**順列** permutation といい,
 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ のように表わす. このような順列は全部で $n!$ 個ある. そのうち $(1, 2, \dots, n)$ は**基本順列** original permutation という.

1 つの順列 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ に, その順列の中の 2 つの数を交換する操作を施して, 基本順列に変形するとき, 操作の回数が偶数であるか奇数であるかは変形の仕方に関わらず一定であることが示される.

$n = 3$ の場合について, その仕組みを差積の添え字の交換による符号の変化で見よう.

$$f = f(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

において, $\{1, 2, 3\}$ のどの 2 つを交換しても, f は $-f$ になる. k 回交換すれば, f は $(-1)^k f$ になる. (p_1, p_2, p_3) が 2 つの数の交換回数が k で $(1, 2, 3)$ に至り, 別の方法では交換回数が l で $(1, 2, 3)$ に至ったとする. このとき, $(-1)^k f = (-1)^l f$ であるから, k と l の奇数か偶数かは一致する. 実際

$$\begin{aligned} (3, 2, 1) &\rightarrow (1, 2, 3) \quad \text{と} \quad (3, 2, 1) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 2, 3) \quad \text{奇数回} \\ (3, 1, 2) &\rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 2, 3) \quad \text{と} \quad (3, 1, 2) \rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 3) \quad \text{偶数回} \end{aligned}$$

操作の回数が偶数回であるような順列を**偶順列** even permutation, 奇数回であるような順列を**奇順列** odd permutation という. 特に, 基本順列は偶順列である.

例 $(3, 1, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 2, 4) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$
 $(3, 4, 5, 2, 1) \rightarrow (1, 4, 5, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 5, 4, 3) \rightarrow (1, 2, 3, 4, 5)$
 だから $(3, 1, 2, 4)$ は偶順列, $(3, 4, 5, 2, 1)$ は奇順列である.

順列における数の並びで, 左の数が右の数より大きいとき, この 2 数の組の関係を**転倒** inversion という. $(3, 1, 2, 4)$ では $(3, 1), (3, 2)$ が転倒の関係であり, $(3, 4, 5, 2, 1)$ では $(3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1), (5, 2), (5, 1), (2, 1)$ が転倒の関係になっている. 転倒の関係になっている 2 つの数を交換していけば, 基本順列に至るので, 転倒数が偶数か奇数かによって, 偶順列か奇順列であることが知れる.

順列 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ に対して,

p_1 よりあとにあって, p_1 より小さい数の個数を k_1

p_2 よりあとにあって, p_2 より小さい数の個数を k_2
 以下同様にして $k_3, \dots, k_{n-1}$ を定める. $k_n = 0$ である. このとき
 $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}$

が順列 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の**転倒数**である. 転倒数によって偶順列・奇順列が分かる.

順列 P の**符号** $\text{sign } \varepsilon_p$ を

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & (P \text{ が偶順列のとき}) \\ -1 & (P \text{ が奇順列のとき}) \end{cases}$$

によって定義する.

さて, 3 次の行列式の展開式は, この符号を用いて次のように表される. ただし, $\sum$ 記号の下にある (i, j, k) は $\{1, 2, 3\}$ のすべての順列を動くという意味である.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{(i,j,k)} \varepsilon_{(i,j,k)} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\ &= \varepsilon_{(1,2,3)} a_{11} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{(1,3,2)} a_{11} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{(2,1,3)} a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + \varepsilon_{(2,3,1)} a_{12} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{(3,1,2)} a_{13} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{(3,2,1)} a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

n 次の行列式の定義は, 3 次の場合と同じように次のようにする.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

ただし, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ は $\{1, 2, \dots, n\}$ のすべての順列をわたるものとする.

この行列式の展開は順列の総数である $n!$ 項からなる. $n \geq 4$ のとき, サラスの方法のような便利な式は存在しない

定義に従って $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ の展開式は $4! = 24$ 個の項からなり,

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ の係数は $\varepsilon_{(1,2,3,4)} = 1$ であり, $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ の係数も $\varepsilon_{(4,3,2,1)} = 1$ である.

係数が 1 のものと, -1 のものがそれぞれ 12 個ずつある.

定義によると, 1 次の行列式は $|a_{11}| = \sum_p \varepsilon_{(p_1)} a_{1p_1}$ であるが, p_1 は $p_1 = 1$ の場合しかなく,

$P = (1)$ について $\varepsilon_{(1)} = 1$ だから, 結局 $|a_{11}| = a_{11}$ である. 行列式の記号が絶対値と同じであるが, 区別して考える必要がある.

順列の符号の性質

1 順列の隣どうしの数を入れ替えると, 順列の符号は変わる:

$$\varepsilon_{(p_1 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_n)} = -\varepsilon_{(p_1 \cdots p_{i+1} p_i \cdots p_n)}$$

2 順列の 2 つの数を入れ替えると, 順列の符号は変わる:

$$\varepsilon_{(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} = -\varepsilon_{(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)}$$

証明 1 $p_i < p_{i+1}$ のとき p_i と p_{i+1} を入れ替えれば, 転倒数が 1 つ増える. また $p_i > p_{i+1}$ のとき p_i と p_{i+1} を入れ替えれば, 転倒数が 1 つ減る. いずれにしても, 偶順列と奇順列が入れ替わる.

2 $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n)$ において p_i と p_j を入れ替えは $2(j-i)-1$ 回の隣どうしの交換によって実現するので, 1 により順列の符号は変わる.

行列式 $|A| = |a_{ij}|$ の展開式の項 $a_{1p_1}a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ は第 1 行, 第 2 行, $\dots$, 第 n 行から 1 つずつ成分をかけて得られている. このとき $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列であった. 行の代わりに列で行えば, 項は $a_{q_1 1}a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ のようである. ここで, $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ も $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列である. さて, この項の積の順序を交換する.

順列の符号の性質

$$3 \quad a_{q_1} a_{q_2} \cdots a_{q_n} = a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad \text{と表すとき} \quad \varepsilon_{(q_1, q_2, \dots, q_n)} = \varepsilon_{(p_1, p_2, \dots, p_n)}$$

実際、順列 $(1, 2, \dots, n)$ に隣どうしの交換を何回か行うことにより、 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ が得られるから、その交換の回数と、 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の隣どうしの交換で $(1, 2, \dots, n)$ を得る回数は一致することがわかる。それを $n=4$ の場合で例示する。

$$\begin{aligned} a_{q_1} a_{q_2} a_{q_3} a_{q_4} &= a_{31} a_{22} a_{43} a_{14} = a_{31} a_{22} a_{14} a_{43} \\ &= a_{31} a_{14} a_{22} a_{43} = a_{14} a_{31} a_{22} a_{43} = a_{14} a_{22} a_{31} a_{43} = a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} \end{aligned}$$

に対応する添え字は、最初の方が

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (3, 2, 4, 1) \rightarrow (3, 2, 1, 4) \rightarrow (3, 1, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 2, 4) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$$

後の方が

$$(1, 2, 3, 4) \leftarrow (1, 2, 4, 3) \leftarrow (1, 4, 2, 3) \leftarrow (4, 1, 2, 3) \leftarrow (4, 2, 1, 3) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

両者をまとめて、2重添え字の前を上段に、後を下段に表し、上下をセットにして隣同士を交換したように表示すれば

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

のように、回数の一致は明らかである。

この性質を、転置行列の行列式で用いる。

練習問題 3.1

(1) 次の行列式を計算せよ。

$$\textcircled{1} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

(2) 次の等式を証明せよ。

$$\textcircled{1} \quad \begin{vmatrix} a+b & a+3b \\ a+2b & a+4b \end{vmatrix} = -2b^2$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} a+5b & b \\ c+5d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列式を計算せよ.

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

(4) クラームルの公式を用いて, 次の連立一次方程式を解け.

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x - y + 2z = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

(5) 次の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ における次の項の符号を求めよ.

$$\textcircled{1} a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$

$$\textcircled{2} a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$

$$\textcircled{3} a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$$

(6) $n = 4$ のとき, $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列を偶順列と奇順列に分類せよ.