3.2　行列式の性質

いつも行列式の定義から行列式を計算するのでは無駄が多い．通常は，行列式のいくつかの性質を導いておいて，それらの性質を使いながら計算していく．

$|A|=|a_{ij}|$ において $a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$ の場合は，行列式の次数が１つ下がる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明　$a_{1i}=0\ (i>1)$ だから，

$$\text{左辺} = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = a_{11}\sum_P \varepsilon_P a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad \text{ただし，} P=(1, p_2, \cdots, p_n)$$

$$\text{右辺} = a_{11}\sum_{P'} \varepsilon_{P'} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad \text{ただし，} P'=(p_2, \cdots, p_n)$$

ここで，符号の定義から $\varepsilon_{P'}=\varepsilon_P$ であるから 左辺＝右辺 である．（終）

上の性質から

対角行列の行列式は，対角成分の積である．
一般に，下三角行列の行列式は，対角行列の積である．

特に，２次と３次の場合では $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad$ ，$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$

１つの行の各成分が２数の和として表されているとき, この行列式は２つの行列式の和として表すことができる．

１つの行のすべての成分に共通の因子は，行列式の因子としてくくり出すことができる．

２つの行を交換すると符号が変わる．

証明　３次の行列式で示すが，n 次の行列式でも同様である．

また，簡単のため証明すべき式の行を指定して示す．

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' & a_{13}+a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{左辺}=\sum_P \varepsilon_P (a_{1p_1}+a_{1p_1}')a_{2p_2}a_{3p_3} = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} + \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1}'a_{2p_2}a_{3p_3} = \text{右辺}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{左辺}=\sum_P \varepsilon_P a_{1p_1}(ka_{2p_2})a_{3p_3} = k\sum_P \varepsilon_P a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} = \text{右辺}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$P=(p_1,p_2,p_3)$ が偶順列なら $P'=(p_2,p_1,p_3)$ は奇順列，P が奇順列なら P' は偶順列である．従って $\varepsilon_P=-\varepsilon_{P'}$ である．従って

$$\text{左辺}=\sum_P \varepsilon_P a_{2p_1}a_{1p_2}a_{3p_3} = -\sum_{P'} \varepsilon_{P'} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} = \text{右辺}$$　（終）

> ２つの行が等しい行列式の値は０である
> １つの行の各成分に同一の数を掛けて他の行に加えても，行列式の値は変わらない．

証明　３次の行列式で示すが，n 次の行列式でも同様である．また，簡単のため証明すべき式の行を指定して示す．

第１行と第２行が等しいとき，これらの２つの行を交換すると

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -|A|$$

これから，$2|A|=0$ だから $|A|=0$

第１行各成分に k を掛けて第２行に加えたとき

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{右辺}$$

> 正方行列 A について，その転置行列の行列式は
>
> $$\left|{}^tA\right| = |A|$$

証明　２次の場合は，計算によって確かめる．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\left|{}^tA\right| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$

３次の場合は，サラスの方法で展開した式を比較して確かめよう．

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\left|{}^tA\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

一般の場合は，　$A = \left(a_{ij}\right)$，${}^tA = (b_{ij})$ とおく．$b_{ij} = a_{ji}$ より

$$\left|{}^tA\right| = \sum_Q \varepsilon_Q b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} = \sum_Q \varepsilon_Q a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = \sum_P \varepsilon_P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = |A|$$

ここで，$a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ とおき，$Q = (q_1, q_2, ..., q_n), P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ については，順列の符号の性質３から，$\varepsilon_Q = \varepsilon_P$　を用いた．

この性質を使うと，行で述べられた行列式の性質は列でも同様に成り立つことがいえる．即ち，

> １つの列の各成分が２数の和として表わされているとき，この行列式は２つの行列式の和として表すことができる．
>
> １つの列のすべての成分に共通の因子は，行列式の因子としてくくり出すことができる．
>
> ２つの列を交換すると符号が変わる．
>
> ２つの列が等しい行列式の値は０である
>
> １つの列の各成分に同一の数を掛けて他の列に加えても，行列式の値は変わらない．

２つの n 次行列 A, B の積 AB の行列式を計算する．

$n=2$ の場合，

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とおくと $AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ から

$$|AB|=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}b_{11}b_{12}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}b_{11}b_{22}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}b_{21}b_{12}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}b_{21}b_{22}$$

$$=0+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}b_{11}b_{22}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}b_{21}b_{12}+0$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=|A||B|$$

$n=3$ の場合も同様にして $|AB|=|A||B|$ が示される．

一般に次が成り立つ．

n 次行列 A, B の積 AB について $$\lvert AB\rvert = \lvert A\rvert\lvert B\rvert$$

この証明の方法が見える，一般化のしやすい n=2 の場合の別証明を示す.

２次行列 A, B, C について $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \lvert A\rvert\lvert B\rvert$ を用いる.

$$\lvert A\rvert\lvert B\rvert = \begin{vmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & -1 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

第１列に，第３列× b_{11} ＋第４列× b_{21} を加える
第２列に，第３列× b_{12} ＋第４列× b_{22} を加える

$$= \begin{vmatrix} 0 & -I \\ AB & A \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} AB & A \\ 0 & -I \end{vmatrix} = (-1)^2 \lvert AB\rvert\lvert -I\rvert = \lvert AB\rvert$$

第１行と第３行，第２行と第４行の交換をする

計算例１　$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\lvert TA\rvert = \lvert T\rvert\lvert A\rvert$ を確かめる.

T を A の左から掛けると，$TA = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ であり，A の第１行と第２行が入れ替わる．ここで $\lvert T\rvert = \varepsilon_{(213)} 1\cdot 1\cdot 1 = -1$ であり，また $\lvert TA\rvert = -\lvert A\rvert$ でもある.

計算例２　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

計算例３　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

この式が成り立つことは因数定理からも分かる．即ち，左辺はa,b,cの３次の多項式$f(a,b,c)$であり，$a=b, b=c, c=a$のとき，行列式の値は０であるから，$f(a,b,c)$は$a-b, b-c, c-a$を因子にもち，$f(a,b,c)$は３次式であるから

$$f(a,b,c) = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

と表わされる．ここで，両辺のab^2の係数を比較すると，$k=1$が分かる．

計算例４　ωが$x^3=1$の虚数解のとき

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega(\omega-1) \neq 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+\omega b+\omega^2 c & a+\omega^2 b+\omega c \\ a+b+c & c+\omega a+\omega^2 b & c+\omega^2 a+\omega b \\ a+b+c & b+\omega c+\omega^2 a & b+\omega^2 c+\omega a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a+\omega b+\omega^2 c & a+\omega^2 b+\omega c \\ 1 & \omega(a+\omega b+\omega^2 c) & \omega^2(a+\omega^2 b+\omega c) \\ 1 & \omega^2(a+\omega b+\omega^2 c) & \omega(a+\omega^2 b+\omega c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$$

$$\text{よって，}\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c) \quad (\omega^3=1)$$

練習問題 3.2

(1) 次の各等式を行列式の定義から示せ．また，本文にある行の性質を使って示せ．

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$

② $\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

④ $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

⑤ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(2) 次の等式が成り立つように k の値を定めよ．

① $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+2c_1 & c_1+3a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+2c_2 & c_2+3a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+2c_3 & c_3+3a_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

② $$\begin{vmatrix} 2b_1+c_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2+c_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3+c_3 & c_3+3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列式を因数分解せよ.

① $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$　② $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(4)　次の等式を確認せよ.

① $$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

② $$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

(5)　次の等式を証明せよ.

① $$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

② $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_3 & c_4 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_5 & c_6 & b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{vmatrix}$$