

### 3.3 小行列式と余因子行列

3 次の行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  の  $i$  行,  $j$  列を取り除いてできる 2 次の行列式を  $(i, j)$  成分  $a_{ij}$  の小行列式 minor determinant といい,  $D_{ij}$  とかく.

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

次の等式が成り立つ.

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} \quad (\text{第 1 行についての展開})$$

$$|A| = -a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} - a_{23}D_{23} \quad (\text{第 2 行についての展開})$$

$$|A| = a_{31}D_{31} - a_{32}D_{32} + a_{33}D_{33} \quad (\text{第 3 行についての展開})$$

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} \quad (\text{第 1 列についての展開})$$

$$|A| = -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32} \quad (\text{第 2 列についての展開})$$

$$|A| = a_{13}D_{13} - a_{23}D_{23} + a_{33}D_{33} \quad (\text{第 3 列についての展開})$$

3 次の行列式  $A$  の  $(i, j)$  成分  $a_{ij}$  の小行列式  $D_{ij}$  に  $(-1)^{i+j}$  をかけたものを  $(i, j)$  成分の余因子 cofactor といい,  $A_{ij}$  と書く. すなわち,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$  とおく.

この記号を用いると,  $|A|$  の第  $k$  行 ( $k=1, 2, 3$ ) についての展開式は

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + a_{k3}A_{k3} = |A|$$

と表わされる. ここで,  $A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}$  はその定義から  $A$  の第  $k$  行の成分を用いないで表されている. そこで, 上式の左辺の  $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}$  を  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$  でおきかえると, 右辺では  $|A|$  の第  $k$  行を第  $i$  行で置き換えることになり,  $i \neq k$  とすると, 第  $i$  行と第  $k$  行が一致するので 0 である:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \quad (i \neq k)$$

列についても同様の考察ができる.

次の等式が成り立つ.

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = |A| \quad (i=1, 2, 3)$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = |A| \quad (j=1, 2, 3)$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = 0 \quad (i \neq k)$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = 0 \quad (j \neq k)$$

1 番目と 3 番目の式をまとめると  $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = |A|\delta_{ik}$

2 番目と 4 番目の式をまとめると  $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = |A|\delta_{jk}$

$A_{ij}$  を成分とする行列の転置行列を  $A$  の**余因子行列** cofactor matrix といい,  $\tilde{A}$  で表わす.

すなわち

$$\tilde{A} = {}^t \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

このとき、次の等式が成り立つ.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I_3$$

特に  $|A| \neq 0$  ならば  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$  がなりたつ.

3 次の行列  $A$  が正則であるための必要十分条件は  $|A| \neq 0$  である.

証明  $|A| \neq 0$  ならば,  $A$  の逆行列があるので,  $A$  は正則である. 逆に,  $A$  が正則であるならば,  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  により  $AA^{-1} = I$  である. ここで両辺の行列式をとると, 左辺は  $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$ , 右辺は  $|I| = 1$  であるから,  $|A||A^{-1}| = 1$  なので,  $|A| \neq 0$  である.

3 次の行列  $A$  が正則であるための必要十分条件は,  $A$  の列ベクトルが 1 次独立であることである.

証明 3 次の行列  $A = (a_{ij})$  の列ベクトルを  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$  と表す.  $|A| \neq 0$  とする.

$k_1, k_2, k_3$  に対して  $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  ならば, それは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = 0 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = 0 \end{cases}$$

を意味するから, クラームルの公式より解くと,  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  となるので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は 1 次独立となる. 逆に  $|A| = 0$  ならば,  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I_3 = \mathbf{0}$  である. ここで  $\tilde{A} = \mathbf{0}$  のときは,  $A$  の (どの) 2 列のベクトルも平行であり,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は 1 次従属とわかる. また  $\tilde{A} \neq \mathbf{0}$  のときは, 0 でない成分を含む  $\tilde{A}$  の列ベクトルが  $j$  番目ならば

$$\mathbf{a}_1A_{j1} + \mathbf{a}_2A_{j2} + \mathbf{a}_3A_{j3} = \mathbf{0}$$

から,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は 1 次従属であるといえる.

計算例 1  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  のとき, 余因子行列を用いて  $A^{-1}$  を計算する.

まず  $|A| = 4$  であり,  $A$  は正則である. 余因子をすべて調べると,

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \end{aligned}$$

従って  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 14 \\ 4 & -6 & -18 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$  であるので,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$  に代入して

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 14 \\ 4 & -6 & -18 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**計算例 2** クラームルの公式を余因子行列を用いて導こう.

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

は, その係数行列を  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  とし,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  とおくと,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表わされる.  $|A| \neq 0$  とすると,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$  だから, 上の式に左からこれを掛けると

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} \mathbf{b} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

である. 両辺の列ベクトルの第 1 成分から

$$x_1 = \frac{1}{|A|} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

同様に第 2 成分, 第 3 成分から

$$x_2 = \frac{1}{|A|} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{1}{|A|} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

をえる.

$$\text{4 次の行列式 } |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{ の展開式を 3 次の場合と同じように計算する方法}$$

を導こう. 行列式の性質は 3 次だけでなく 4 次でも成立することを利用する.

行列式の定義から  $|A| = \sum_{(i,j,k,l)} \varepsilon_{(i,j,k,l)} a_i b_j c_k d_l$ , ただし,  $\Sigma$  における  $P = (i, j, k, l)$  は

$\{1, 2, 3, 4\}$  のすべての順列をわたるものであった. この和を 4 つに分けて

$$|A| = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 + a_4 U_4$$

とする. ただし,  $U_1, U_2, U_3, U_4$  は  $|A|$  の第 2 行, 第 3 行, 第 4 行の成分からなる式である.

$U_1$  は  $i=1$  の場合の項の総和であり,  $P = (1, j, k, l)$  における  $(j, k, l)$  が  $(2, 3, 4)$  のすべて

の順列をわたる場合に当たる. 従って,  $U_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$  である. 第 1 列と第 2 列を入れ

換えると  $|A| = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_1 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_1 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$  であるから,  $U_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$  である. 同様にして

$$U_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}, \quad U_4 = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \quad \text{が示される. このようにして, 3 次の場合と同}$$

様に, 4 次の行列式の第 1 行についての展開式が得られる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

この式を用いて, 符号に注意しながら, 第 1 行と第 2 行を入れ替えて計算すると, 第 2 行についての展開式がえられる. 同様に第 3 行, 第 4 行についての展開式も得られる. さらに, 転置行列を用いると, 各列についての展開式も得られる.

4 次の行列式を第 1 行で展開した式を導いた方法で,  $n$  次行列  $A = (a_{ij})$  について, 行列

式  $|A| = |a_{ij}|$  の第 1 行についての展開式が

$$|A| = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}D_{1n}$$

となることがわかる. ここで,  $D_{ij}$  は  $A$  から第  $i$  行と第  $j$  列を取り除いてできる  $n-1$  次の

小行列式であり,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$  は  $A$  の  $(i, j)$  成分  $a_{ij}$  の余因子である.

$|A|$  の第  $i$  行 ( $i = 2, \dots, n$ ) についての展開式求めるには, 第  $i$  行をすぐ上の行と入れ替えることを  $i-1$  回繰り返して, 第 1 行が元の第  $i$  行で, 第 2 行から第  $i$  行までが, 元の第 1 行から第  $i-1$  行であるようにする. その結果  $|A|$  は  $(-1)^{i-1}|A|$  に変わる.  $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$  だから

$$|A| = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} (a_{i1}D_{i1} - a_{i2}D_{i2} + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}D_{in})$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1}D_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}D_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}D_{in}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

この式は  $i=1$  の場合も成り立つ。さて、第  $i$  行で展開した式で、その余因子  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$  は第  $i$  行以外の行の成分からなることに注意しよう。最後の式  $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$  において、第  $i$  行  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  を第  $k$  行  $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$  ( $k \neq i$ ) で置き換えたもの

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$$

は、 $|A|$  において、第  $i$  行  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  を第  $k$  行  $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$  ( $k \neq i$ ) で置き換えたものだから、その行列式は第  $i$  行と第  $k$  が等しいことから、値は 0 である。

転置行列を用いると、 $|A|$  の各列についての展開式も得られる。以上から

$A$  の  $(i, j)$  成分  $a_{ij}$  の余因子を  $A_{ij}$  とおくと、次がなりたつ。

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|$$

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad (k \neq i)$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = |A|$$

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = 0 \quad (k \neq j)$$

$A_{ij}$  を成分とする行列の転置行列（行列  $A$  の余因子行列）を  $\tilde{A}$  で表わす：

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

このとき、上の定理から、 $n=3$ のとき計算で得た式は、一般の $n$ 次の場合でも成り立つ。

$n$ 次行列 $A$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I_n$$

特に  $|A| \neq 0$  ならば  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$  がなりたつ。

$n$ 次行列 $A$ について次は同値である。

- (1)  $A$ は正則である。
- (2)  $|A| \neq 0$ である。
- (3)  $A$ の $n$ 個の列ベクトルは1次独立である。
- (4)  $A$ の $n$ 個の行ベクトルは1次独立である。

### 練習問題 3.3

- (1) 2次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、その余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。また $|\tilde{A}| = |A|$ である

ことを示し、 $A\tilde{A}, \tilde{A}A$ を計算せよ。

- (2)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、 $\tilde{A}$ を求め、 $A\tilde{A}, \tilde{A}A$ を計算し、 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ を確かめよ。

- (3) 3次行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 11 \end{vmatrix}$  を第1行、第2行、第3行、第1列、第2列、第3列に

ついて展開し、結果が一致することを確認すること。

- (4) 4次行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$  を各行、各列について展開し、結果が一致することを

確認すること。

- (5) 3次の行列 $A$ が正則であるための必要十分条件は、 $A$ の行ベクトルが1次独立であることを示せ。