3.4　行列の階数

(m,n) 型行列 $A=(a_{ij})$ の r 個の行と r 個の列の交差点にある要素を，そのまま並べて作った r 次の行列式を A の r 次の**小行列式** minor determinant という. 勿論, $r \le \mathrm{Min}(m,n)$ である．r 次の小行列式は全部で ${}_mC_r \times {}_nC_r$ 個ある．r 次の小行列式がすべて 0 ならば，すべての k $(k>r)$ について k 次の小行列式は 0 である.

その値が 0 でない小行列式の最大次数を A の**階数** rank という．A の階数を rank(A) で表わす．零行列の階数は 0 とする.

行列の階数は行基本変形を行っても変わらない. 行列の階数は行列を転置しても変わらない.

証明のアウトライン：　3 つの行基本変形に分けて，行列 A に行基本変形をした行列を B とするとき，どの基本操作をしても行列式の値が 0 であるかないかは変わらないことを使って，rank(A)＝ r ならば rank(B)＝ r となることを示す.

A の第 i 行と第 j 行を交換した行列が B のとき

A の第 i 行に 0 でないスカラー c をかけた行列が B のとき

A の第 i 行にスカラー c をかけて第 j 行に加えた行列が B のとき

の各々の場合について，A の r 次の小行列式で 0 でないものがあることから，B の r 次の小行列式で 0 でないものがあることがいえる．また B の r +1 次の小行列式は（存在すれば）すべて 0 であるあることがいえる.

後半は，転置行列をとることで行列式の値が変わらないことから明らかである.

行列の行ベクトルの 1 次独立性，1 次従属性は行基本変形を行っても変わらない.

証明のアウトライン：　実質的に問 1.4 で済んでいる．A の行ベクトルを $A=\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix}$ とし，$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_m$ が 1 次独立（1 次従属）ならば，

$$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_j, \cdots, \mathbf{w}_i, \cdots, \mathbf{w}_m \ (i<j)$$

$$\mathbf{w}_1, \cdots, c\mathbf{w}_i, \cdots, \mathbf{w}_m \ (c \ne 0)$$

$$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_i, \cdots, \mathbf{w}_j + c\mathbf{w}_i, \cdots, \mathbf{w}_m \ (i \neq j)$$

も 1 次独立（1 次従属）であることを示す.

計算例１　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ のとき，３次の小行列式は４つあるが，いずれも 0 である．２次の小行列式は 12 個あるが，0 でないものがある（いずれも 0 ではない）．0 でない最大次数が 2 だから rank（A）= 2 である.

また，A は行基本変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に至るので，上のことはより明白になる．A には２個の 1 次独立な行ベクトルがある.（どの２つでもよい)．しかし，３個の行ベクトルは 1 次従属である.

計算例２　$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ のとき，３次の小行列式の中に 0 でないものがある.

また行基本変形をすると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に至るので，rank（B）= 3 である.

> 行基本変形によって左下の成分が０であるような階段行列に変形したとき，零ベクトルでない行数が,（元の）行列の階数である.
> 階段行列の零ベクトルでない行数を r とするとき，この r 個の行ベクトルは 1 次独立である.
> 元の行列の行ベクトルの 1 次独立な最大個数は r である.

証明のアウトライン：　(m,n) 型行列 $A = (a_{ij})$ が行基本変形によって階段行列

$$B=\begin{pmatrix} & b_{1i_1} & \cdots & b_{1i_2} & \cdots & & & b_{1i_r} & \cdots & b_{1n} \\ & & & b_{2i_2} & \cdots & & & b_{2i_r} & \cdots & b_{2n} \\ & & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & b_{ri_r} & \cdots & b_{rn} \\ O & & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad \left(b_{1i_1}, b_{2i_2}, \cdots, b_{ri_r} \text{は0でない}\right)$$

になったとき，rank（B）= r である．従って rank（A）= r でもある．

B の上から r 個の行ベクトルが 1 次独立であることは, 1 次独立の定義に従えば分かる．更に，それ以上の個数の行ベクトルが 1 次独立にならないことも明らかである．

従って，A には r 個の 1 次独立な行ベクトルがあり，それ以上の個数の 1 次独立なベクトルは存在しない．

Gauss の消去法や逆行列を求めるときは，行基本変形のみを行ったが，階数を求めるときは，列基本変形も行ってもよいことになる．

行と列の立場を入れ替えると，次が成り立つ．

列基本変形によって右上の成分が 0 であるような階段行列に変形したとき，零ベクトルでない列数が,（元の）行列の階数である．

階段行列の零ベクトルでない列数を r とするとき，この r 個の列ベクトルは 1 次独立である．

元の行列の列ベクトルの 1 次独立な最大個数は r である．

3 種類の行基本変形と 3 種類の列基本変形を総称して，**基本変形** elementary operation という．

行列 A に基本変形を行うと，最終的に $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形の行列に変形される．これを A の**標準形** canonical form という．ここで I_r は r 次の単位行列である．これから, rank（A）= r となる．

(m,n) 型行列 A の階数が r で，$r=m<n$ ならば標準形は $\begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix}$ であり，$r=n<m$ ならば，標準形は $\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}$ である．また $r=m=n$ ならば，標準形は I_n となる．

計算例 3　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は列基本変形をすると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形され，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は列基本変形をすると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と変形される．

計算例４　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -8 & 2 & -7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 10 & 3 \\ -2 & 2 & 6 & -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ は $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に行基本変形され，更に標準形 $C=\begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に列基本変形される．よって rank（A）＝３ であり，３個の行ベクトルとして，例えば第２行，第３行，第４行が最大個数の１次独立なベクトルであり，３個の列ベクトルとして，例えば第１列，第２列，第４列が最大個数の１次独立な列ベクトルである．

掃き出し法（ガウスの消去法）による連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=k_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=k_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=k_3 \end{cases}$ の解法から，その係数行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，拡大係数行列 $(A\,|\,\mathbf{k})=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & k_3 \end{array}\right)$ の階数についての関係を調べる．

掃き出し後の行列を $(B\,|\,\mathbf{l})=\left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & l_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & l_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & l_3 \end{array}\right)$ とおいて，解が存在するか否かを２つの階数の値 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$，$\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{k})=\mathrm{rank}\,(B\,|\,\mathbf{l})$ を調べて考察する．

$b_{11}b_{22}b_{33}\neq 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{k})=3$

$b_{11}b_{22}\neq 0,\ b_{33}=0,\ l_3\neq 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A)=2<\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{k})=3$

$b_{11}b_{22}\neq 0,\ b_{33}=0,\ l_3=0$　のとき，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{k})=2$

$b_{11} \neq 0,\ b_{22} = b_{33} = 0, b_{23} \neq 0, l_3 \neq 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A) = 2 < \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{k}) = 3$

$b_{11} \neq 0,\ b_{22} = b_{33} = 0, b_{23} \neq 0, l_3 = 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{k}) = 2$

$b_{11} \neq 0,\ b_{22} = b_{33} = 0, b_{23} = 0, l_2 \neq 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A) = 1 < \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{k}) = 2$

$b_{11} \neq 0,\ b_{22} = b_{33} = 0, b_{23} = 0, l_2 = 0$　のとき，$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{k}) = 1$

階数が等しいときは解が存在（1 組または無限組）し，階数が等しくなければ解は存在しないことが分かる．

連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$ の解があるための必要十分条件は，その係数行列 A と拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{k})$ の階数が等しいことである．

連立１次方程式は右辺のベクトル $\mathbf{k}$ が $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ のとき，同次連立一次方程式という．

同次連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という**自明な解**をもつ．

同次連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつための必要十分条件は，その係数行列 A が正則でないことである．

証明　係数行列が正則であれば, クラーメルの公式より x, y, z は行列式の商として表示されるが，分子の行列式は，１つの列の成分はすべて 0 だから，$x = y = z = 0$ であるから，自明でない解はない．係数行列が正則でなければ，この連立 1 次方程式を消去法で解くとき，係数行列の部分が単位行列にならないから，自明でない解が存在することがわかる．

これまでの議論はそのまま次のように一般化される．

連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = k_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$ が解をもつための必要十分条件は，その係数行列 A，拡大係数行列を $(A \mid \mathbf{k})$ について $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A \mid \mathbf{k})$ が成り立つことである．

同次連立１次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつための必要十分条件は，その係数行列 A が正則でないことである．

練習問題 3.4

(1)　次の行列の階数を小行列式による方法と基本変形による２通りの方法で求めよ．
また行ベクトルのうち最大個数の１次独立系と，列ベクトルの最大個数の１次独立系を求めよ．

① $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$　　④ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(2)　異なる２点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ であることを示せ．

(3)　３直線 $a_k x + b_k y + c_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ が互いに平行また共通点をもつための必要十分条件は $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ であることを示せ．