3.5　Mathematica による計算Ⅲ

1　行列式を計算する.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ のとき，$|A|$ を展開し，因数分解しよう．行列式は Det で求まる.

多項式を因数分解するには，Factor を用いる.

```
A={{1,1,1},{a,b,c},{a^2,b^2,c^2}}
d=Det[A]
Factor[d]
```

答　$-a^2b+ab^2+a^2c-b^2c-ac^2+bc^2$
$-(a-b)(a-c)(b-c)$

2　順列の符号を調べる.

順列 $P=(p,q,\ldots,r)$ の符号 ε_P を求めるには，Signature[{p,q,…,r}] とする.

$P=(1,3,2,4), Q=(4,3,2,1)$ のとき，$\varepsilon_P,\varepsilon_Q$ を求めよう.

```
P={1,3,2,4};
Q={4,3,2,1};
Signature[P]
Signature[Q]
```

答　$-1, 1$

3　リストの全順列を求める．全順列を並べたリストから，k 番目のリストを抽出する.

L={1,2,3} としよう．P=Permutations[L] により全リストが得られる．P の長さは Length[P] で求まる． P の k 番目は P[[k]] で抽出できる． k=2 とし，その t 番目の成分は P[[2]][[t]] あるいは簡単に P[[2,t]]となる.

```
L={1,2,3};
P=Permutations[L]
Length[P]
P[[2]]
P[[2]][[2]]
```

答　{{1,2,3},{1,3,2},{2,1,3},{2,3,1},{3,1,2},{3,2,1}}
6,　{1,3,2},　3

4　３次の行列の展開式を書き下す.

簡単な方は

```
A=Array[a,{3,3}]
Det[A]
```

答　{{a[1,1],a[1,2],a[1,3]},{a[2,1],a[2,2],a[2,3]},
{a[3,1],a[3,2],a[3,3]}}
-a[1,3] a[2,2] a[3,1]+a[1,2] a[2,3] a[3,1]+a[1,3] a[2,1] a[3,2]-
a[1,1] a[2,3] a[3,2]-a[1,2] a[2,1] a[3,3]+a[1,1] a[2,2] a[3,3]

定義による方法は

```
L={1,2,3};
P=Permutations[L]
Sum[Signature[P[[k]]] a[1,P[[k,1]]] a[2,P[[k,2]]] a[3,P[[k,3]]],
  {k,1,Length[P]}]
```

あるいは

```
Sum[Signature[P[[k]]]
    Product[a[t,P[[k,t]]],{t,1,3}],{k,1,Length[P]}]
```

5　３次行列 A, B の積の行列式について $|AB| = |A||B|$ を示す. 結果が 0 を確認すればよい.

```
A=Array[a,{3,3}]
B=Array[b,{3,3}]
Det[A.B]-Det[A] Det[B]//Simplify
```

6　３次の行列式の (i, j) 成分の小行列式を求める.

そのためには，行列から第 i 行を取り除くには，リストの成分を除く Delete を用いる. また j 列を除くには，転置行列にして j 行を除く．もう一度転置すべきだが，行列式をとるとき，転置しても関係ないので転置はしないで済ます.

$A = (a_{ij})$ のとき，a_{23} の小行列式 D_{23} と余因子 A_{23} を求める.

```
A=Array[a,{3,3}];
D23=Det[Delete[Transpose[Delete[A,2]],3]]
A23=(-1)^(2+3) D23
```

答　–a[1,2] a[3,1]+a[1,1] a[3,2]
a[1,2] a[3,1]-a[1,1] a[3,2]

このプログラムを一般化して，A の余因子行列 $\tilde{A}$ を表示する.

```
A=Array[a,{3,3}];
cA=Table[Table[
          (-1)^(i+j) Det[Delete[Transpose[Delete[A,i]],j]],
        {j,1,3}], {i,1,3}];
Transpose[cA]//MatrixForm
```

7　行列 A の r 次の小行列式をすべて求めること．

Minors[A,r] によって得られるが，個々の r 行 r 列の小行列式がどこに得られているのかを説明するのは困難である．出力の順序を気にせず，Flatten をつけると見やすい．

```
A = {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}}
Minors[A, 3]
Minors[A, 2]
  あるいは Minors[A, 2]//Flatten
  あるいは Minors[A, 2]//Flatten//Union
```

答　{{0, 0, 0, 0}}

{{-4, -8, -12, -4, -8, -4}, {-8, -16, -24, -8, -16, -8},
 {-4, -8, -12, -4, -8, -4}}

出力の順序を気にするなら，次を実行して結果を調べるとよい．

```
B = Array[x, {3, 4}]
Minors[B, 2] // MatrixForm
```

8　m と n を指定して，m×n 型の行列の成分を乱数によって定めること．

-k から k までの範囲の整数や実数を１つ発生させるには，k を適当に指定して

```
k=9; Random[Integer,{-k,k}]
k=1; Random[Real,{-k,k}]
```

とする．行列 A を 10×15 型とすると，次で得られる．

```
m=10;
n=15;
k=5;
 A=Table[Random[Integer,{-k,k}],{m},{n}]
```

実行例　n = 8;　m = 6;　k =5;　とする．

{{1, -4, 0, 3, -5, 5, 2, -3}, {4, 2, -4, 2, -3, -4, 1, 5},
 {1, 5, 2, 0, 1, 2, -3, -2}, {0, 2, 2, -5, -5, -5, -4, -3},
 {5, 3, 5, -5, -4, 4, -1, -4}, {2, -4, 5, -1, 1, 3, 3, 4}}

９　n 次行列式の２つの行を交換すると符号が変わることを示す.

一般の n 次行列 A の指定した２つの行（第 i 行と第 j 行）を交換する．i < j のようにし，A から第 j 行，第 i 行の順に抜き取った行列を t とし，t の i 番目に A[[j]]を挿入し，更に j 番目に A[[i]]を挿入して B とおく．Det[A] + Det[B]を計算して，０であることを確認すればよい.

```
n = 6;
ii = 2; jj = 4;
j = Max[ii, jj]；i = Min[ii, jj]
A = Array[x, {n, n}]
t = Delete[Delete[A, j], i]
B = Insert[Insert[t, A[[j]], i], A[[i]], j]
Det[A] + Det[B] // Simplify
```

n に大きい数を指定すると時間がかかる.

１０　与えられた行列の行ベクトルから最大個数の１次独立なベクトルを選出する.

プログラムの考え方として，まず８のような方法で行列Aを与える．Aは行ベクトルのリストであり，Aの第 i 行は A[[i]]である．１次独立なベクトルの系のリストをBと名付けておく．最初はBは空集合である．このリストに現れる最初の零でないベクトルが f 番目にあったとして, A[[f]] を B に入れる. m-1 番目までに零ベクトルが無ければ A[[m]]を B にいれる．従って B={zero} ならば１次独立系は存在しないことになる.

s=f とおく.

A[[1]],A[[2]],…,A[[s]]の１次結合で表せない A[[s+1]],A[[s+2]],…,A[[m]]の中の最初のベクトルを見つけて，それが A[[t]]であれば，それを B に後ろから付け加える.

s=f とおいて，上のループを s<m である限り繰り返す.
こうやってできた B が求めるものである.

ここで，A[[t]]が A[[1]],A[[2]],…,A[[s]]の１次結合であるか否かを判断するのに，未知数ベクトル u = {x[1],x[2],…,x[m-1]} を用意し，

Solve[Sum[A[[k]] x[k],{k,1,s}]==A[[t]],Table[x[k],{x,1,s}]

なる解（集合）が空であれば，１次従属であり，空でなければ１次独立だから A[[t]] を B に Append する.

アペンドしたかどうかは，それまでの B の大きさが増えたことで判断できる.
次のプログラムで外側の While 文は s の増加を促し, 内側の While 文は t の増加を促す.

```
m=10;   n=15;  k=5;
A=Table[Random[Integer,{-k,k}],{n},{m}]
zero = Table[0, {n}];
B = {};
f = 1;
While[A[[f]] == zero && f < m, f++]
B = Append[B, A[[f]]];
f;
u = Array[x, {m - 1}];
s = f;
While[s <= m - 1,
     ll = Length[B];
     t = s + 1;
     While[t <= m - 1  &&  Length[B] == ll,
        sol =  Solve[Sum[A[[k]]  x[k], {k, 1, s}] == A[[t]],
                      Table[x[k], {k, 1, s}]];
        If[sol != {}, t = t + 1, B = Append[B, A[[t]]]]
           ];
     s = t]
A // MatrixForm
B // MatrixForm
RowReduce[A] // MatrixForm
```

実行例　8のときの行列 A に対する B と RowReduce[A]//MatrixForm の結果

[illegible]	-3	0	-5	-4	5	0	3	-4	3
1	-5	-1	-3	-3	1	5	3	4	4
3	1	5	-5	4	-1	-3	-3	4	4
-2	4	4	5	5	5	-4	1	-4	-4
1	-5	-2	1	4	2	-2	0	4	3
-3	-1	5	-3	5	4	2	-1	-2	-5
-4	-3	-2	-5	-3	4	-5	4	-5	1
5	3	1	-2	-3	2	1	5	-4	-2
-5	1	-3	5	1	-1	2	0	5	2
3	-4	-2	4	5	1	-5	4	-5	5
5	1	-1	5	5	1	-1	-5	0	0
3	0	-1	0	-2	5	-3	-1	2	-3
-3	5	3	5	-1	1	0	0	1	-2
2	-4	3	-4	-2	2	5	-2	-5	1
-3	2	0	-2	-4	-1	1	2	-3	5

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

整数乱数で成分を定めると，階数は上のように一杯になりやすい．

練習問題 3.5

(1) 次の行列式を Mathematica で示すこと.

①
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$$

②
$$\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

③
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma) \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta & \cos(\beta+\gamma) \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 & \cos\gamma \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\beta+\gamma) & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $f(x) = (x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)$ とおくとき，次を示せ.

①
$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ b & x_2 & a & a \\ b & b & x_3 & a \\ b & b & b & x_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} & (a \neq b) \\ f(a) - af'(a) & (a = b) \end{cases}$$

②
$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a & 1 \\ b & x_2 & a & a & 1 \\ b & b & x_3 & a & 1 \\ b & b & b & x_4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} & (a \neq b) \\ f'(a) & (a = b) \end{cases}$$

(3) ５次行列 A の成分を整数乱数でもとめ，第 i 行に k を掛けて第 j 行に加えた行を B とするとき，Det[A] = Det[B] となることを説明するには，Mathematica にどのように入力すればよいか.