演習問題 3

1　次の２次の行列式を計算せよ．

①　$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{vmatrix}$　　②　$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

③　$\begin{vmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{vmatrix}$　　④　$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+i} & \frac{1}{2+i} \\ \frac{1}{3+i} & \frac{1}{4+i} \end{vmatrix}$

2　次の等式を証明せよ．

①　$\begin{vmatrix} a & b-7a \\ c & d-7c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　　②　$\begin{vmatrix} a_1 - x & b_1 \\ a_2 & b_2 - x \end{vmatrix} = x^2 - (a_1 + b_2)x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

③　$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$　　④　$\left| \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \right| = 1$

3　次の３次の行列式を計算せよ．

①　$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　　②　$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$　　③　$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

④　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　　⑤　$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -6 & -6 \end{vmatrix}$　　⑥　$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix}$

⑦　$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix}$　　⑧　$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$　　⑨　$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} \end{vmatrix}$

4　次の行列の行列式を求めよ.

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} a & b' & c'' \\ 0 & b & c' \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b & c'' \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}$

5　次の行列式を因数分解せよ.

① $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$　② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$　④ $\begin{vmatrix} a+b & c^2 & 1 \\ b+c & a^2 & 1 \\ c+a & b^2 & 1 \end{vmatrix}$

⑤ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a+b & a+2b \\ b & a+2b & 2a+b \end{vmatrix}$　⑥ $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$

⑦ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$　⑧ $\begin{vmatrix} a+b & c^3 & 1 \\ b+c & a^3 & 1 \\ c+a & b^3 & 1 \end{vmatrix}$

⑨ $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$　⑩ $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ 2ca-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

⑪ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\beta \end{vmatrix}$　⑫ $\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$ $(A+B+C=\pi)$

6　次の方程式を解け.

① $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$　　② $\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = 0$

③ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 3 \\ x^2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$　　④ $\begin{vmatrix} -x & 1 & 3 \\ 1 & -x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

7　次の等式を証明せよ.

① $\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ca \\ bc & c^2+a^2 & ab \\ ca & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

② $\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & 2b+c+a & c \\ a & b & 2c+a+b \end{vmatrix} = 2\left(a+b+c\right)^2$

③ $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2+x \end{vmatrix} = x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

④ $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta) & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$

8　次の４次の行列式を計算せよ。

① $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　② $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$　　④ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

9　次の等式を証明せよ．

①
$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = 4ab^3+b^4$$

②
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = 0$$

③
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

④
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1+x-x^2+x^3$$

⑤
$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6+x^8$$

⑥
$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$$

⑦
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$$

⑧
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$$

10　次の等式を証明せよ.

①　２次行列 A, B, C について $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\ |B|$

②　２次行列　A, B について $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

11　次の行列式の積を計算して，例示したような右の等式を導け.

①　$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix}$　から　$(a^2-b^2)(c^2-d^2) = (ac+bd)^2 - (ad+bc)^2$

②　$\begin{vmatrix} a & ib \\ ib & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & id \\ id & c \end{vmatrix}$

③　$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

④　$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$　（**10** ② を使う）

12　クラメルの公式を用いて，次の連立一次方程式を解け.

①　$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+w=4 \\ x+z+w=6 \\ y+z+w=8 \end{cases}$　②　$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=20 \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4=35 \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4=56 \end{cases}$

13　次の行列式のすべての小行列式を求めよ.

①　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　②　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$

③　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$　④　$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 14 & 0 \end{vmatrix}$

14　次の行列の3次の小行列式・4次の小行列式をすべて求めよ.

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

15　次の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ と行列式 $|A|$ を求めて、A^{-1} を求めよ.

① $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$　　④ $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　⑥ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16　次の行列の階数を求めよ.

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$

17　A, B を正則な 3 次行列とするとき，余因子行列について，次を証明せよ.

① $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$

② $\widetilde{kA} = k^2 \tilde{A}$　（k はスカラー）

③ $|\tilde{A}| = |A|^2$

④ $\widetilde{(\tilde{A})} = |A| A$

⑤ $(\tilde{A})^{-1} = |A|^{-1} A$

18　次を証明せよ．

①　異なる３点$(x_1,\ y_1, z_1)$, $(x_2,\ y_2, z_2)$, $(x_3,\ y_3, z_3)$を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ である．

②　４平面 $a_k x + b_k y + c_k z + d_k = 0\ (k = 1,2,3,4)$ が１点で交わるための必要十分

条件は $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$ である．

③　xy 平面における円の方程式は定数a, b, c, d を用いて

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0\ (a \neq 0)$$

と表示できる．４点$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$が同一円上にある必要十分条件

は $$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ である．

④　空間において，球面の方程式は定数a, b, c, d, eを用いて

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0\ (a \neq 0)$$

と表示できる．同一平面上にない４点 $(x_i, y_i, z_i)\ (i = 1,2,3,4)$ を通る球面の方程式

は $$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ である．

19　①　次の順列の符号を求めよ．

$(2, 3, \cdots, n, 1)$

$(n, n-1, \cdots, 2, 1)$

$(k, 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n)$

② $\{1, 2, \cdots, n\}$ の順列の偶順列と奇順列はどちらも $\dfrac{n!}{2}$ 個あることを示せ.

20 ① 微分可能な関数を成分とする 3 次の行列式 $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$ について

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1' & h_2' & h_3' \end{vmatrix}$$

であることを示せ.

② $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について，次を求めよ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

③ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ であることを示せ.

④ $f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)$ と $x = \varphi(p, q, r), y = \psi(p, q, r), z = \chi(p, q, r)$ が
いずれも C^1 級であるとき，合成関数の関数行列式について

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(p, q, r)} = \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, q, r)}$$

であることを示せ.