

4.2 固有値と固有ベクトル

2次（または3次）の行列 A の表す平面（または空間）の1次変換 f によって、あるベクトル $\mathbf{x} (\neq \mathbf{0})$ の像 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x}$ のスカラー倍になったとする。即ち、あるスカラー k によって $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ と表せたとする。行列 A に対して、このようなベクトル $\mathbf{x} (\neq \mathbf{0})$ とスカラー k は、どのように求めたらよいであろうか。

2次または3次の行列 A について

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するとき、 λ を A の**固有値** eigen value, $\mathbf{x}$ を固有値 λ に対する（あるいは固有値 λ に属する）**固有ベクトル** eigen vector という。

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が $\mathbf{0}$ でない解 $\mathbf{x}$ を持つための条件は、次の式で与えられる。

$$|A - \lambda E| = 0$$

この式を λ についての方程式とみるとき、 A の**固有方程式** characteristic equation といい、その左辺 $|A - \lambda E|$ を A の**固有多項式** characteristic polynomial という。 A の固有値は、 A の固有方程式を解くことによって求められる。

固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbf{x}$ は、 $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の $\mathbf{0}$ でない解として得られる。

計算例 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、固有多項式は $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$

であり、固有方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ を解くと、固有値 $\lambda = 1, 3$ を得る。

・ $\lambda = 1$ のとき、固有ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \ (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ を成分表示して

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{から} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \neq 0) \text{ である。その1つは } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

・ $\lambda = 3$ のとき、固有ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \neq 0) \text{ である。その1つは } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

確かに、 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が満たされている。また、これ

らの固有ベクトルは1次独立である。

2次行列 A の固有ベクトルが1次独立であるとき, これらを列ベクトルとする行列を P とすると, P は正則であり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ は } A \text{ の固有値})$$

として, A は対角化可能である.

2次の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ では, 上の計算例1から, 異なる固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ に対する固有ベクトルがそれぞれ $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. そこで, $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 = 3\mathbf{x}_2$ だから

$$AP = A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \ 3\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と表すと, $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる. ここで, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は平行でないので, 線形独立であり, P は正則行列である. 従って $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ を得る.

このように, 行列 A に対し, ある正則行列を選んで, $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを行列 A の**対角化** diagonalization といい, 行列 P を**対角化行列** matrix for diagonalization という. また, このとき, A は**対角化可能** diagonalizable であるという.

3次行列 A が, ちょうど3個の1次独立な固有ベクトルをもつとき, これらの固有ベクトルを列ベクトルとする行列を P とすると, P は正則であり, 上と同様に考えると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ は } A \text{ の固有値})$$

として, A は対角化可能である.

証明 $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ ($i=1, 2, 3$) かつ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は1次独立とする. そのとき, $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$

は正則となり,

$$AP = A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) = (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ A\mathbf{x}_3) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \ \lambda_2 \mathbf{x}_2 \ \lambda_3 \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

から $AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ と対角化される。(終)

計算例 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, 固有多項式は $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ であり, A の固有値は $\lambda=1, 2, 3$ である.

・ $\lambda=1$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 1E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (t \neq 0)$$

・ $\lambda=2$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 2E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (t \neq 0)$$

・ $\lambda=3$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 3E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (t \neq 0)$$

これらの固有ベクトルは 1 次独立であるから, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ は正則行列であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ のように } A \text{ は対角化される.}$$

計算例 3 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, 固有多項式は $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ であり, 固有値が $\lambda = 2, -1$ (重解) である.

・ $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$(A - 2E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (t \neq 0)$$

・ $\lambda = -1$ (重解) に対する固有ベクトルは

$$(A + E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から } x + y + z = 0 \text{ 即ち } x = -y - z$$

$$\text{ゆえに, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (s^2 + t^2 \neq 0)$$

ここで, 3個の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は1次独立であるから, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

は正則であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.

対角化可能な行列については, その行列の冪乗を計算することは容易である.

行列 A を正則行列 P で変換して, $P^{-1}AP = D$ が対角行列になったとする. このとき $A = PDP^{-1}$ であるから, 両辺を n 乗すると

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

ここで, 対角行列 D の n 乗は各対角成分の n 乗を成分とする対角行列である.

計算例 4 $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, A^n ($n=1, 2, \dots$) を求める.

A の固有値は $2, 3$ であり, それらに対応する固有ベクトルは $k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

($k_1, k_2 \neq 0$) だから, $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n & 2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 2^{n+2} - 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

3 次行列 A の異なる固有値に対する固有ベクトルは線形独立である。
従って、3 次の行列 A が 3 個の異なる固有値をもてば、 A は対角化可能である。

証明 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて異なるとし、これらに対する固有ベクトルを

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ とする。

まず、 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が線形独立であることを示す。 $k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とする。この式の両辺に A をかけると

$$A(k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3) = k_2 A\mathbf{x}_2 + k_3 A\mathbf{x}_3 = k_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

また、 $k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ の両辺に λ_3 をかけると

$$\lambda_3 (k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3) = k_2 \lambda_3 \mathbf{x}_2 + k_3 \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

従って、 $k_2(\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ である。 $\lambda_2 - \lambda_3 \neq 0, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ だから $k_2 = 0$ である。これから $k_3 = 0$ でもある。

さて、 $k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とおく。この式の両辺に A をかけると

$$A(k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3) = k_1 A\mathbf{x}_1 + k_2 A\mathbf{x}_2 + k_3 A\mathbf{x}_3 = k_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

一方、
$$\lambda_1 (k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3) = k_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \lambda_1 \mathbf{x}_2 + k_3 \lambda_1 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

従って、 $k_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}_2 + k_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ である。 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ が線形独立であったので、 $k_2(\lambda_2 - \lambda_1) = k_3(\lambda_3 - \lambda_1) = 0$ であり、 $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ から $k_2 = k_3 = 0$ 。これから $k_1 = 0$ でもある。(終)

計算例 5 $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、固有方程式は $|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$ である。

$\lambda_2 = 2$ に対する固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるが、 $\lambda_1 = 1$ (重解) に対する固有ベク

トルは $\mathbf{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (t \neq 0)$ であり, 3個の1次独立な固有ベクトルはとれない.

固有方程式の解が実数解ばかりとは限らない. 複素数の固有値 λ に対して, 固有ベクトル $\mathbf{z}$ を求めるには, 複素数を係数行列とする連立1次方程式 $(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}$ を解くことになる. このような複素ベクトル $\mathbf{z}$ の集合 $\{\mathbf{z} \in C^3 \mid (A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}\}$ は C^3 の部分空間をなすが, これを固有値 λ に対する**固有(ベクトル)空間** eigen space という. 固有ベクトルは, 固有空間の $\mathbf{0}$ でないものを指す.

次の節で示すが, 実対称行列では, その固有値がすべて実数になる. また, その行列を直交行列で対角化する問題とその応用を扱う. 複素行列における議論としては, エルミート行列のユニタリ行列による対角化があるが, ここでは計算例としてのみ取り上げる.

計算例 6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-i \\ 1+i & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)$ である.

$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{2}i & 1-i \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる.

練習問題 4.2

(1) 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$