

4.3 対称行列と2次形式

2つの変数 x, y についての2次式

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

を2次形式 quadratic form という.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{とおくと } A \text{ は対称行列であり, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$F(\mathbf{x}) = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x}$$

あるいは, ベクトルの内積を用いて

$$F(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x})$$

と表わすことができる.

3つの変数 x, y, z についての2次形式

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gyz + 2hzx$$

$$\text{についても同様である. 対応する対称行列を } A = \begin{pmatrix} a & f & h \\ f & b & g \\ h & g & c \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$F(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} A \mathbf{x} = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{x})$$

と表せる.

ここでは, 対称行列の対角化問題を扱う. ここでは対角化する行列として直交行列をとることができる. その応用として, 2次形式の標準形化をする.

2次または3次の実対称行列の固有値は, すべて実数である. 従って, 固有ベクトルはすべて実ベクトルをとることができる.

証明 A を2次または3次の実対称行列とする. A を複素成分の行列とみると, $A^* = A$ が成り立つ. A の固有値を λ とし, λ に対する固有ベクトルを $\mathbf{z} (\neq \mathbf{0})$ とする. 複素内積の性質より,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) &= (\lambda \mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{z}^* (A\mathbf{z}) = (\mathbf{z}^* A) \mathbf{z} = (\mathbf{z}^* A^*) \mathbf{z} = (A\mathbf{z})^* \mathbf{z} \\ &= (\lambda \mathbf{z})^* \mathbf{z} = (\overline{\lambda} \mathbf{z}^*) \mathbf{z} = \overline{\lambda} (\mathbf{z}^* \mathbf{z}) = \overline{\lambda} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \end{aligned}$$

$\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \neq 0$ より, $\lambda = \overline{\lambda}$ となるので, λ は実数である. このとき固有ベクトルの成分は実数を係数とする連立方程式の解から得られるので, やはり実数である. (終)

2次または3次の対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する．
従って3次の対称行列 A が3個の異なる固有値をもてば， A は直交行列で対角化できる．

証明 A が2次行列で ${}^tA = A$ とし， A の異なる固有値を λ_1, λ_2 ，対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ であるとする． $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ を示す．

$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ から $A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$ である．一方，

$$A\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = {}^t(A\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 = {}^t\mathbf{x}_1({}^tA\mathbf{x}_2) = {}^t\mathbf{x}_1(A\mathbf{x}_2) = {}^t\mathbf{x}_1(\lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_2{}^t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$$

よって， $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ であり， $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ から $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ である．ここで $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

を単位化してやれば， $T = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$ は直交行列である．

3次の対称行列 A が3個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつとし，対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ とし， $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_3| = 1$ であるようにとる． $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ を満

たすので， $T = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3)$ とおくと， T は直交行列であり， A は $T^{-1}AT = {}^tTAT$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ のように対角化できる．(終) }$$

実は，実対称行列については，固有方程式が重解をもつときも対角化できる．

2次または3次の実対称行列は直交行列で対角化できる．

証明 まず，2次の場合に示す．実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とする． $\lambda_1 \neq \lambda_2$

であれば，直交行列で対角化できることは既を示した． $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \text{ であるが，その判別式は}$$

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

なので，重解をもつのは， $a = c, b = 0$ の場合だけである．従って，直交行列としては単位行列 I をとればよい．

次に，3次の実対称行列 A を対角化する方法を述べる． A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおく． λ_1 に対する固有ベクトルで大きさ1のものを $\mathbf{q}_1$ とする．この $\mathbf{q}_1$ に対して， $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ をとって， $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ が R^3 の正規直交基底になるようにする．このとき $Q = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3)$ と

おくと, Q は直交行列である. ここで, ${}^tQAQ = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{q}_1A\mathbf{q}_1 & u & v \\ {}^t\mathbf{q}_2A\mathbf{q}_1 & a & b \\ {}^t\mathbf{q}_3A\mathbf{q}_1 & c & d \end{pmatrix}$ とおく. ここで

$${}^t\mathbf{q}_1A\mathbf{q}_1 = {}^t\mathbf{q}_1(\lambda_1\mathbf{q}_1) = \lambda_1({}^t\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1) = \lambda_1, \quad {}^t\mathbf{q}_kA\mathbf{q}_1 = {}^t\mathbf{q}_k(\lambda_1\mathbf{q}_1) = \lambda_1({}^t\mathbf{q}_k\mathbf{q}_1) = 0 \quad (k=2,3)$$

であることと, tQAQ が対称行列であることから, ${}^tQAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & B \end{pmatrix}$ の形である. ただし,

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおいた. 両辺の固有方程式を比較して, 右辺は $(\lambda_1 - \lambda)|B - \lambda E| = 0$ であり, 左辺は A の固有方程式だから, λ_2, λ_3 は対称行列 B の固有値である. 2 次の場合の

結果から, ある直交行列 T により, ${}^tTBT = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる. そこで, $R = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix}$ と

おくと, R は 3 次の直交行列であり, ${}^tR({}^tQAQ)R = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & {}^tTBT \end{pmatrix}$ である. そこで, $P = RQ$ とおくと, P は直交行列で, A は P によ

り, ${}^tPAP = {}^tQ{}^tRARQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ と対角化される. (終)

計算例 1 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 固有方程式は

$|A - \lambda I| = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ であり, 固有値は $\lambda = 0, 2, 3$ である. 対応する単位固有ベ

クトルはそれぞれ $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるので, 直交行列

$$T = (\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{によって, } {}^tTAT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ を得る.}$$

計算例 2 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 固有多項式は $-(\lambda+2)^2(\lambda-4)$ であ

る. 固有値 $\lambda = -2$ (重複解) に対する固有ベクトルは $(A+2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解いて,

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ から, 固有空間の基底 } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ がとれる. これを正規直交化}$$

$$\text{して, } \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \text{ である. 次に, 固有値 } \lambda = 4 \text{ に対する固有ベクトルは}$$

$$(A-4I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ を解いて, } \mathbf{x} = m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ から, 単位化して } \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$Q = (\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3) \text{ は直交行列で, } A \text{ は } Q \text{ によって } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ のように対角}$$

化される.

練習問題 4.3

次の対称行列を直交行列で対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$