4.5　Mathematica による計算IV

1　1 次写像 $f:R^5 \to R^4$ の表わす行列が $A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&8\\3&-1&-5&2&1\\1&3&5&1&10\\0&1&2&-1&4\end{pmatrix}$ のとき，f の像と核の基底を求める．$\mathrm{Im}(f)$ は A の 5 個の列ベクトルたち $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5$ で生成される R^4 の部分空間であり，RowReduce[A] から 3 個の（行および）列ベクトルが 1 次独立であることが分かる．例えば Solve を使うことで，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ が 1 次独立でありことが分かり，従って $\mathrm{Im}(f)$ の基底である．

```
A = {{1, 2, 3, 0, 8}, {3, -1, -5, 2, 1}, {1, 3, 5, 1, 10},
    {0, 1, 2, -1, 4}};
RowReduce[A] // MatrixForm
tA = Transpose[A];
tA//MatrixForm
Solve[k tA[[1]] + l tA[[2]] + m tA[[4]] == {0, 0, 0, 0}, {k, l, m}]
```

答 次のように出力する．

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0&8\\3&-1&-5&2&1\\1&3&5&1&10\\0&1&2&-1&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3&1&0\\2&-1&3&1\\3&-5&5&2\\0&2&1&-1\\8&1&10&4\end{pmatrix}$$

```
{{k -> 0, l -> 0, m -> 0}}
```

$\mathrm{Ker}(f)$ は $p={}^t(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ とおくとき，$A\,{}^t(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)={}^t(0,0,0,0)$ の解の全体である．

```
p = Array[x, {5}]
Solve[A.p == {0, 0, 0, 0}, p]
```

答　{x[1], x[2], x[3], x[4], x[5]}

Solve::"svars": "Equations may not give solutions for all "solve" variables."　（このメッセージは解が多数あるときに現れる．）

Solve::"svars": "方程式はすべての "solve" 変数に対しては解を与えない可能性があります．（日本語キットのとき）

{{x[1] -> x[3] - 2 x[5], x[2] -> -2 x[3] - 3 x[5], x[4] -> x[5]}}

従って，$x_3 = x[3] = s,\ x_5 = x[5] = t$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{となり} \quad \mathrm{Ker}(f) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in R \right\}$$

最も簡単に行列 A の表わす１次変換 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ を求めるには,

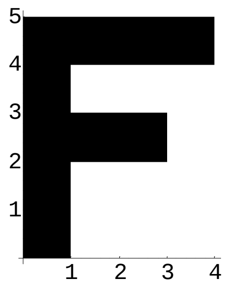
```
NullSpace[A]
```

答　{{-2,-3,0,1,1},{1,-2,1,0,0}}

により，核の基底が分かる.

2　平面図形 F を１次変換 f で移してその像F' を描く．まず F を構成するデータを用意し，これらを頂点とする多角形を表示する.

```
F = {{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}, {3, 2}, {3, 3}, {1, 3}, {1, 4},
        {4, 4}, {4, 5}, {0, 5}, {0, 0}};
Show[Graphics[Polygon[F]], Axes -> True, AspectRatio -> Automatic]
```



さて，１次変換の表わす行列により，Ｆの像F'を構成するデータを計算する.

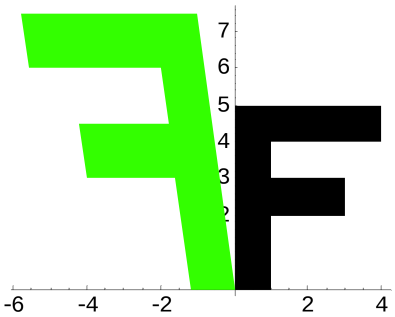
次は Ｆ と F' を同一画面に表示させる.

```
A = {{-1.2, -0.2}, {0, 1.5}};
F' = {};
For[i = 1, i <= Length[F], i++,
  F' = Append[F', A.F[[i]]]]
F'
Show[Graphics[{Polygon[F], {Hue[0.3], Polygon[F']}}],
    Axes -> True,  AspectRatio -> Automatic]
```

上の計算で F から F’を求める部分は純関数を用いると

```
F’=Map[A.#&,F];
```

と簡単に記述できる.



行列Aを原点の周りの回転を表わすようにとる．アニメーションするプログラムは，次のようである．

```
F = {{0, 0}, {1, 0}, {1, 2}, {3, 2}, {3, 3}, {1, 3}, {1, 4},
    {4, 4}, {4, 5}, {0, 5}, {0, 0}};
Clear[A];
A[t_] := {{Cos[t], -Sin[t]}, {Sin[t], Cos[t]}};
For[t = 0, t <= 2 Pi, t = t + Pi/12,
  F' = Map[A[t].#&,F];
  Show[Graphics[{Polygon[F], {Hue[0.5 + 0.035  t], Polygon[F']}}],
  Axes -> True, AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> {{-6, 6}, {-6, 6}}]
   ]
```

アニメとして見るには，対象とするグラフィックス全体のセルを範囲指定して，Mathematica のメニューからセル(Cell)の Annimate Selected Graphics を選択する．

3　固有値を計算する．

$a=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ とし，その固有多項式と固有ベクトルを定義によって求める．

```
a = {{1, 2}, {3, 4}};
e = IdentityMatrix[2];
ep = Det[a - x e]
Solve[ep == 0, x]
```

答　$-2-5x+x^2$

$\left\{\left\{x\to\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{33}\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{33}\right)\right\}\right\}$

Mathematica の組み込み関数を使えばもっと簡単である．

```
CharacteristicPolynomial[a,x]
Eigenvalues[a]
```

4　$b=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求める.

```
b = {{1, 2}, {2, 1}};
Eigensystem[b]
```

答　{{-1, 3}, {{-1, 1}, {1, 1}}}
この出力結果から 行列ｂの固有値が　1，3 であって，-1 に対する固有ベクトルが {-1,1}, 3 に対する固有ベクトルが {1,1} であることがわかる.

5　対称行列 $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$を対角化する直交行列 T を求める.

Eigensystem による出力リストの最初は固有値なので，これを削除し，固有ベクトルの部分をそれぞれ単位化した行ベクトルからなる行列を転置して，対角化する直交行列 T を求める.

```
c = {{2, 0, 1}, {0, 2, -1}, {1, -1, 1}}；
es = Eigensystem[c]
ev = Delete[es, 1][[1]]
t = {};
For[i = 1, i <= 3, i++,
    t = Append[t, 1/Sqrt[ev[[i]].ev[[i]]] ev[[i]]]]
t
tt = Transpose[t];
tt // MatrixForm
Transpose[tt].c.tt // MatrixForm
```

答　$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

直交行列になるまで単位化しないで，固有ベクトルを列ベクトルとして並べた正則行列 P を用いると，

```
c = {{2, 0, 1}, {0, 2, -1}, {1, -1, 1}};
es = Eigensystem[c]
ev = Delete[es, 1][[1]]
p = Transpose[ev];
p // MatrixForm
Inverse[p].c.p // MatrixForm
```

答　$p = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6　一般の行列 W は，必ずしも対角化できないが，適当な正則行列 P を用いて，$P^{-1}WP$ が次のようなジョルダン細胞

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \text{は行列 W の固有値})$$

とよばれる行列たちを対角線に並べた行列

$$J = \begin{pmatrix} J_\alpha & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & J_\delta \end{pmatrix}$$ （W の**ジョルダンの標準形**）

に変換できる．

変換行列 P と標準形 J を求める Mathematica の組み込み関数 JordanDecomposition[w] を用いると，対称行列の直交行列による変換も解決する．

```
c = {{2, 0, 1}, {0, 2, -1}, {1, -1, 1}};
{p, j} = JordanDecomposition[c];
p // MatrixForm
j // MatrixForm
Inverse[p].c.p // MatrixForm
```

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

最後の入力行は，確認のためのものである．

7　2 次曲線 $x^2-2xy+3y^2+2x-3y=10$ を描く．ここでは，標準形にしないで陰関数のままで描く関数 ImplicitPlot を用いる．これを使う前に，グラフィックス関数のパッケージを開いておく．

```
<< Graphics`Master`
ImplicitPlot[x^2 - 2 x y + 3y^2 + 2x - 3y == 10,
            {x, -5, 4}, {y, -5, 4}]
```

8　２次曲面を，陰関数のまま描く関数 ImplicitPlot3D は MapleV では可能であるが Mathematica には用意されていない．標準形に変形した後で，関数の形に応じて，直交座標や極座標や媒介変数表示にして，Plot3D や ParametricPlot3D で描く．

楕円双曲面　$z=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}$　は直交座標で描けるが媒介変数表示の方が分かりやすい．

```
Plot3D[x^2/9+y^2/25,{x,-5,5},{y,-5,5}]
ParametricPlot3D[{3 s Cos[t] , 5 s Sin[t], s^2},
      {s, 0, 3}, {t, 0, 2 Pi}, BoxRatios -> {1, 2, 1}]
```

一葉双曲面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$ は双曲線関数 Cosh, Sinh を用いる．

```
ParametricPlot3D[{ 3 Cosh[s] Cos[t], 2Cosh[s]Sin[t], Sinh[s]},
 {s, -Pi/2, Pi/2}, {t, 0, 2Pi}, BoxRatios -> {1, 1, 1}]
```

楕円柱面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 方向ベクトル　$p=(3,2,5)$

```
ParametricPlot3D[{3 Cos[t], 2 Sin[t], 0} + s {3,2,5},
{s, 0, 1}, {t, 0, 2 Pi}]
```

楕円錐面　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　定点　$p=(3,2,5)$

```
ParametricPlot3D[s {3,2,5} + (1 - s){3 Cos[t], 2 Sin[t], 0},
    {s, 0, 1}, {t, 0, 2 Pi}, BoxRatios -> {1, 1, 0.5}]
```

球　$x^2+y^2+z^2=1$ を描く．極座標系 (r,θ,φ) で表すと，$r=1$ である．

```
<< Graphics`Master`
SphericalPlot3D[1, {theta, 0, 2Pi}, {phi, 0, Pi}]
```