演習問題４

1　次の写像は１次写像か．１次写像ならば対応する行列を求めよ．

① $f_1 : R^3 \to R^2,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$　　② $f_2 : R^3 \to R^3,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $f_3 : R^2 \to R^3,\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$　　④ $f_4 : R^3 \to R^3,\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+3 \\ 3z \end{pmatrix}$

⑤ $f_5 : R^3 \to R^3,\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$　　⑥ $f_6 : R^3 \to R^3,\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ x-1 \end{pmatrix}$

2　①　１次変換 f を表す行列が $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、点 P(3, 1), Q(-1, 2) の像 P’= f (P), Q’= f (Q) の座標を求めよ．

② ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ に移す線形変換を表す行列を求めよ．

③ ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に移す線形変換による点 P(x, y)の像を求めよ．

3　①　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ が表わす線形変換を f とする．$f \circ f$ により，点(1, -2) はどのような点に移るか．

②　R^2 の線形写像 f が $f(e_1) = e_2$，$f(e_2) = e_1 - e_2$ を満たすとき、次を求めよ．

$$f \circ f \circ f(e_1),\qquad f \circ f \circ f(e_2)$$

4　次の各行列で表わされる線形変換による指定した直線の像を求めよ．

①　$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　　直線 $y = 2x - 1$

② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$　直線 $x+2y=1$

③ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$　直線 $y=x-1$

5　①　原点 O と点 A(3, 1) に対して、△OAB が正三角形になるような点 B の座標を求めよ.

②　平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転する線形変換 f により、方程式

$(x-y)^2=\sqrt{2}(x+y)$ で表わされる図形 G の像を求めよ．また G のグラフを描け.

③　座標平面上で，x 軸に関する対称変換を f，原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転する線形変換を g とするとき，合成変換 $g\circ f$ は直線 $y=x$ に関する対称変換であることを示せ.

④　平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転する線形変換によって，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ はどのような方程式の図形に移されるか。

⑤　平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転する線形変換 f により，双曲線 $x^2-y^2=1$ はどのような方程式の図形に移されるか。

⑥　平面上の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転する線形変換 f により，楕円 $x^2+5y^2=2$ はどのような方程式の図形に移されるか。

6　①　行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換により，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ はどのような図形に移されるか.

②　行列 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によって，次の図形はそれぞれどのような図形に移されるか.

放物線 $y=x^2$　　　円 $x^2+y^2=1$

③ 行列$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$で表わされる空間内の線形変換によって，次の図形はどのような図形に移されるか.

直線 $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y}{3\sqrt{2}} = z$　　平面 $x + y + z = 1$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で空間内の線形変換によって、次の図形はどのような方程式で表される図形に移されるか.

球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$　　双曲放物面 $z = x^2 - y^2$

7 次の行列の定める線形写像の像の基底および核の基底を求めよ.

$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & -4 & -12 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

8 次のような１次写像 f があるかどうか調べよ.

① $f: R^3 \to R^2$ で $\mathrm{Im}(f) = R^2$,　$\mathrm{Ker}(f) = \langle e_1, e_2 \rangle$ を満たすもの

② $f: R^3 \to R^3$ で $\mathrm{Im}(f) = R^3$,　$\mathrm{Ker}(f) = \langle e_1 \rangle$ を満たすもの

③ $f: R^2 \to R^3$ で $\mathrm{Im}(f) = R^3$ を満たすもの

9　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。また，固有空間の基底を求めよ．

①　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$　　②　$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$

③　$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$　　④　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑤　$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$　　⑥　$\begin{pmatrix} 2 & 3i & 1+2i \\ -3i & -1 & -2 \\ 1-2i & -2 & 3 \end{pmatrix}$

⑦　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　　⑧　$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10　次の行列は対角化できるか．できるときは対角化行列を求め，対角化せよ．

①　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　②　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

③　$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$　　④　$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11　次の対称行列を直交行列で対角化せよ．

①　$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　　②　$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

③　$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　④　$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

12　３次の正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とするとき，次を示せ．

① $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$ が成り立つ.

② $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$　（A が正則である必要十分条件は A の固有値はすべて０でない）

③ $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$　（左辺を行列 A の**トレース** trace という）

13　λ が行列 A の固有値のとき，次を示せ.

① λ^2 は A^2 の固有値である.

② A が正則ならば，$\dfrac{1}{\lambda}$ は A^{-1} の固有値である.

14　次の２次形式の標準形を求めよ.

① $5x^2+4xy+8y^2$

② $x^2+2xy-y^2$

③ $2x^2-2xy+2y^2$

④ x^2+xy+y^2

15　次の２次形式の標準形を求めよ.

① $x^2+2y^2+z^2+2xy+2yz+4zx$

② $2xy+2yz+2zx$

③ $x^2+y^2+2z^2+2xy$

④ $3x^2+3y^2+3z^2+2xy-2xz-2yz$

16　次の行列の n 乗を求めよ.

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17　次を証明せよ.

① A と ${}^tA$ は同じ固有値をもつ.

②　AB と BA は同じ固有値をもつ.
③　P が正則のとき，$P^{-1}AP$ と A は同じ固有値をもつ.
④　三角行列（上三角行列または下三角行列）の固有値はその対角成分である.
⑤　$A^2 = A$ ならば A の固有値は 0 または 1 である.
⑥　正整数 n について $A^n = O$ ならば，A の固有値はすべて 0 である.

18　次を証明せよ.
①　３次の直交行列は １または －１を固有値にもつ.
②　２次のエルミート行列の固有値は実数である.

19　２次行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルを $\mathbf{x}$ とする．任意のベクトル $\mathbf{z}$ に A の表す 1 次変換を n 回行った結果を $\mathbf{z}^{(n)} = A^n\mathbf{z}$ とおく．$n \to \infty$ のとき，$\mathbf{z}^{(n)}$ は $\mathbf{x}$ に平行になる．すなわち，多数回の変換を行うと，任意のベクトルが固有ベクトルの方向に向かうことを，Mathematica のグラフィックスで説明するプログラムを作れ.

20　３次行列 A の固有多項式を $\varphi(\lambda) = |A-\lambda I| = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ とおく．このとき，λ を A で置きかえた多項式

$$\varphi(A) = |A-\lambda I| = a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I$$

は 零行列であることを，Mathemaica による計算で示すこと.
（一般の場合は**ケーリー・ハミルトンの定理**である）